ՏԱՐՐԱԿԱՆ ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ

ՄԱՍՆ ԱՌԱՋԻՆ.

ՊԼԱՆԻՄԵՏՐԻԱՅ

Հեղինակութիւն

ՄՈՍԿՈՒԱՅԻ ԿԱՅՍԵՐԱԿԱՆ ՀԱՄԱԼՍԱՐԱՆԻ ՊՐՈՖԵՍՈՐ

Ա. ԴԱՒԻԴՕՎԻ

Թարգմանեց

ԵՐԿՐԱՉԱՓ ՎԱԽՏԱՆԳ ՀԱՍԱՆ-ՋԱԼԱԼԵԱՆՑ.

Թ Ի Ֆ Լ Ի Ս

Տպարան «Էպօխա» Մուղնեցկի պեր. № 8.

1912

Աչքի առաջ ունենալով այն դժուարութիւնները, որոնց հանդիպում են հայոց ուսումնարանների աշակերտները անցնելով երկրաչափութեան դասերը ռուսաց լեզուով գրած ձեռնարկների վերայ, ես թարգմանեցի պատուելի պրոֆեսոր Դաւիդովի «Տարրական երկրաչափութիւնը», միայն հետեւեալ փոփոխութեամբ. մի քանի ոչ շատ կարեւոր առաջարկութիւններ դուրս հանելով, աւելացրի մի նոր մաս՝ գործնական երկրաչափութիւն։

Ամբողջ «Տարրական երկրաչափութիւնը» բաժանեցի երեք մասի. ա.) երկրաչափութիւն հարթութեան վերայ. բ.) երկրաչափութիւն տարածութեան մէջ. գ.) գործնական երկրաչափութիւն և խնդիրներ։ Միջոցները չեն ներում բոլոր երեք մասերը միասին հրատարակելու, ուստի առ այժմ տպագրում եմ միայն ա. մասը, որ ամենահարկաւորն է։

Վ. Հ. Ջ.

ՆԱԽԱԳԻՏԵԼԻՔ

— Ինչ բան որ կարելի է մեծացնել և փոքրացնել, անուանվում է մեծութիւն. օրինակի համար մարմինների զանազան յատկութիւնները, որք են՝ ամրութիւն, առաձգականութիւն, ծանրութիւն, ընդարձակութիւն և այլն, կարող են հետազօտուիլ որպէս մեծութիւններ, որովհետև մարմինները կարող են ունենալ աւելի մեծ կամ աւելի փոքր ամրութիւն, աւելի մեծ կամ աւելի փոքր ընդարձակութիւն, աւելի մեծ կամ աւելի փոքր առաձգականութիւն։ Ուսումն մեծութիւնների առհասարակ անուանվում է մատեմատիկայ։ Իսկ մատեմատիկայի մի ճիւղը, որ իւր մէջ պարունակում է ուսումն ընդարձակութիւնների, անուանվում է երկրաչափութիւն։

Երկրաչափութիւնը հետազօտում է միայն այն տարածութիւնները, որոնք ամփոփում են մարմինները, ուշադրութիւն չդարձնելով մարմինների միւս յատկութիւնների վերայ և հէնց այդ պատճառաւ երկրաչափական մարմին, կամ առհասարակ մարմին երկրաչափութեան մէջ անուանվում է տարածութիւն ամէն կողմից սահմանափակուած, անկախ նորա մէջ գտնված նիւթից։

Մարմնի սահմանը անուանվում է մակերևոյթ, մակերևոյթի սահմանը—գիծ, գծինը—կէտ։

Մարմինները ունին երեք չափ՝ երկարութիւն,

լայնութիւն և բարձրութիւն. մակերևոյթները—երկու՝ երկարութիւն և լայնութիւն, գծերը—մի՝ երկարութիւն, իսկ կէտը չունի ոչ մի չափ։

Երկրաչափական գծերը և կէտերը չի կարելի նկարով ներկայացնել, որովհետև իւրաքանչիւր նկարած գիծ ունի մի որ և է լայնութիւն և բարձրութիւն, այդ պատճառաւ նա ներկայացնում է մի մարմին, որի երկու կամ բոլոր երեք չափերը սաստիկ փոքրիկ են։

Որովհետև մակերևոյթը մարմնի սահմանն է, գիծը մակերևոյթի սահմանը, և կէտը գծի սահմանն է, այդ պատճառաւ չէ կարելի մարմինը ընդունել որպէս մի շարք միմեանց հետևող մակերևոյթների, մակերևոյթը—որպէս մի շարք միմեանց հետևող գծերի և գիծը—որպէս մի շարք միմեանց հետևող կէտերի. բայց կարելի է երևակայել, որ մակերևոյթի անընդհատ շարժումով գոյանում է մարմին, գծի անընդհատ շարժումով գոյանում է մակերևոյթ և կէտի անընդհատ շարժումով—գիծ։ Եթէ մենք գծի վերայ նայում ենք որպէս մի գոյութեան վերայ կէտի անընդհատ շարժումից, այդ գիծը պիտի իւր մէջ պարունակէ այն բոլոր տեղերը, որոնց վերայով հետևապէս անցել է կէտը, այդ պատճառաւ գիծը անուանվում է երկրաչափական տեղ այն կէտերի, որոնց նա պարունակում է։

Գծերը լինում են ուղիղ և ծուռ. ուղիղ և ծուռ գծերի մէջ եղած զանազանութիւնը չէ կարելի բացատրել, այլ այն պարզ և որոշ կերպով հասկանալի է ամենքին։

Ուղիղ գծի մասին հասկացողութիւնը պատկանում է այն սկզբնական հասկացողութեանը, որ չէ թոյլ տալի ոչ մի որոշում։

Մի քանի ուղիղ գծերից բաղկացած գիծը, որ չէ գտնվում մի ուղիղ գծի վերայ, անուանվում է կոտրտուած գիծ։

Մակերևոյթները լինում են հարթ և կոր։ Երբ իւրաքանչիւր ուղիղ գիծ միացնելով մակերևոյթին, գծի իւրաքանչիւր կէտը ևս միանում է մակերևոյթի հետ, ապա այդպիսի մակերևոյթը անուանվում է հարթ մակերևոյթ կամ հարթութիւն, իսկ այն մակերևոյթը, որ հարթութիւն չէ, անուանվում է կոր մակերևոյթ։

Երկրաչափութիւնը բաժանվում է՝ երկրաչափութիւն հարթութեան վերայ, որ անուանվում է Պ լ ա ն ի մ ե տ ր ի ա, երկրաչափութիւն տարածութեան մէջ, որ անուանվում է Ս տ ե ր է ո մ ե տ ր ի ա։ Առաջինում հետազօտվում են այն ընդարձակութիւնները, որոնց կարելի է ներկայացնել հարթութեան վերայ, իսկ երկրորդում—այն ընդարձակութիւնները, որոնց չէ կարելի ներկայացնել հարթութեան վերայ. այս մասում նոյնպէս զննվում են երկրաչափական մարմինների յատկութիւնները։ Պլանիմետրիան ստերէոմետրիայի հետ միացրած անուանվում է Տարրական երկրաչափութիւն, որպէս զի զանազանուի բարձր երկրաչափութիւնից, որ զննում է առհասարակ կոր գծերը և մակերևոյթները։

Երկրաչափական բոլոր եզրակացութիւնները դուրս են բերվում մի քանի ճշմարտութիւններից, որք ինքն ըստ ինքեան ակներև են. այսպիսի ճշմարտութիւնները անուանվում են ա ք ս ի ո մ ա. օրինակի համար՝ Ամբողջը հաւասար է իւր բոլոր կտորների գումարին-

Ամբողջը աւելի մեծ է քան իւր կտորներից իւրաքանչիւրը։ Երկու քանակութիւն, որոնցից իւրաքանչիւրը հաւասար է երրորդին, հաւասար են միմեանց և այլն։ Սոքա ճշմարտութիւններ են։

Տ ե օ ր ե մ ա յ կամ առաջարկութիւն անուանվում է այնպիսի ճշմարտութիւն, որ ակներև է դառնում մի քանի շարք դատողութիւններից յետոյ։ Տեօրեմայի ճշմարտութիւնը արտայայտող այդ դատողութիւնները անուանվում են ապացուցութիւն։

Պ ր օ բ լ ե մ ա յ կամ խնդիր անուանվում է մի հարց, որի պատասխանը հիմնվում է ապացուցած առաջարկութեանց վերայ։

Լ ե մ մ ա յ անուանվում է այնպիսի տեօրեմայ, որ չունի անմիջական կապ նախընթաց տեօրեմաների հետ, այլ բերվում է միայն աւելի պատշաճաւոր տեօրեմաների ապացուցութեանց կամ խնդիրների լուծման համար։

Իւրաքանչիւր տեօրեմայ բաղկացած է երկու մասերից՝ առաջարկութիւնից և եզրակացութիւնից։ Մի տեօրեմայ անուանվում է հակառակ միւսին, երբ սորա եզրակացութիւնը դառնում է նորա առաջարկութիւն, իսկ նորա եզրակացութիւնը դառնում է սորա առաջարկութիւն։—Ամէն հակառակ առաջարկութիւն չէ կարող ճշմարիտ լինել,

---

ՄԱՍՆ Ա․

ՊԼԱՆԻՄԵՏՐԻԱՅ

ԿԱՄ

ԵՐԿՐԱՉԱՓՈՒԹԻՒՆ ՀԱՐԹՈՒԹԵԱՆ ՎԵՐԱՅ

Գ Լ Ո Ւ Խ Ա․

ՈՒՂԻՂ ԳԾԵՐԻ ԵՒ ԱՆԿԻՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

§ *1.* Ա կ ս ի ո մ ա յ։ Ուղիղ գիծն է երկու կետերի միջի ամենակարճ ճանապարհը։

Այդ առաջարկութիւնը հետևում է ուղղակի այն հասկացողութիւնից, որ մենք ունինք ուղիղ գծի մասին։

Որովհետև երկու կետերի մէջ մի կարճ ճանապարհից աւելի չէ կարող լինել, ապա ակներև է, որ երկու կետերի մէջ կարող ենք երևակայել միայն մի ուղիղ գիծ։

Ուղիղ գծի այդ սկզբնական յատկութիւնից հետևում է.

1. Երկու կետերը բոլորովին որոշում են իրանց վերայով անցնող ուղիղ գծի դրութիւնը։

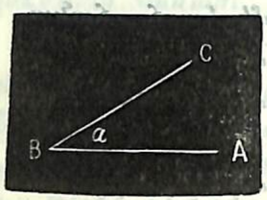
2. Երկու ուղիղ գծեր հատուելով մի կետում, միւս կետում հատուել այլ ևս չեն կարող, որովհետև այն ժամանակ այդ երկու կետերից կ'անցնէին երկու զանազան ուղիղ գծեր, այն ինչ երկու կետերի մէջ կարող ենք երևակայել միայն մի ուղիղ գիծ։

Դնելով քանոնը A և B երկու կէտերի վերայ (Նկար 1.) և անց կացնելով նորա վերայով գիծ, կը ստանանք ուղիղ գծի նկարագիրը։

Նկար 1.

Այդ նկարագիրը անուանվում է նոյնպէս ուղիղ գիծ, չնայելով որ նկարագրի և գծի մէջ՝ կայ էական զանազանութիւն. ուղիղ գիծը կարելի է անց կացնել միայն մտաւորապէս և նա մատչելի է միայն մեր երևակայութեանը, այն ինչ նորա նկարագիրը ներկայացնում է մեզ մի մարմին, որ ունէ ամենափոքր լայնութիւն և բարձրութիւն։ Ուղիղ գիծը նշանադրվում է երկու տառերով, որք դրվում են նորա ոը և իցէ երկու կէտերի մօտ և այդ երկու տառերով անուանակոչվում է գիծը. օրինակ՝ առաջին նկարի ուղիղ գիծը անուանվում է AB։

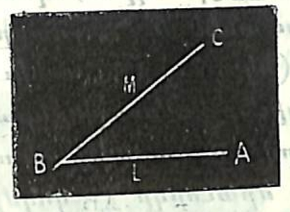
§ 2. Անկիւն անուանվում է հարթութեան մի անորոշ մասը ներփակուած երկու ուղիղ գծերի մէջ, որք դուրս են գալիս մի կէտից. B կէտը (Նկար 2.), որից դուրս են գալիս BA և BC գծերը, անուանվում է գագաթ, իսկ իրանք՝ BA և BC, որք կազմում են անկիւնը, անուանվում են անկեան կողմեր կամ ս ր ո ւ ն ք ն ե ր։ Անկիւնը նշանադրվում է երեք տառերով ABC, այնպէս, որ գագաթի մօտ դրուած տառը գրվում է միւս տառերի մէջտեղը։



Նկար 2.

Երբեմն անկիւնը նշանադրվում է մի տառով B, որ դրուած է գագաթի մօտ, կամ a տառով, որ գըրվում է անկեան մէջ։

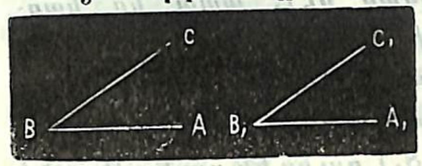
Անկիւն բառի փոխարէն գործ են ածում նոյնպէս ∠ նշանը։



Նկար 3.

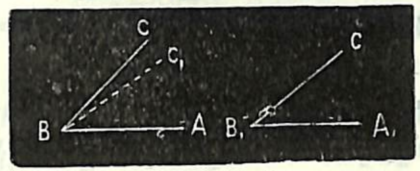
Անկեան մեծութիւնը կախումն չունի նորա կողմերի երկարութիւնից. օրինակ $\angle ABC = \angle LBM$ (Նկր. 3.), այլ նորա մեծութիւնը կախուած է կողմերի բացումից, որին և ասում են անկեան բերան։

§ 3. Երկու անկիւններ ABC և $A_1B_1C_1$ (Նկր. 4) անուանվում են հաւասար անկիւններ, անկախ իւրեանց կողմերի երկարութիւնից, երբ դնելով B գագաթը B_1 գագաթի վերայ և BA կողմը B_1A_1 կողմի վերայ, կը տեսնենք որ BC կողմն էլ միաւորվում է B_1C_1 կողմի հետ։



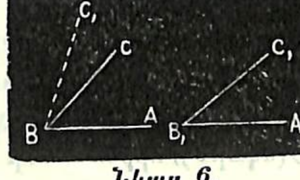
Նկար. 4.

Իսկ եթէ $A_1B_1C_1$ անկեան (Նկր. 5.) գագաթը դնելով ABC անկեան գագաթի վերայ, A_1B_1 կողմը դնելով AB կողմի վերայ, տեսնում ենք որ B_1C_1 կողմն անցնում է BC_1 գծի ուղղութեամբ, որ գտնվում է ABC անկեան մէջ, այն ժամանակ ասում ենք $\angle A_1B_1C_1$ փոքր է $\angle ABC$. կամ $\angle ABC$ մեծ է $\angle A_1B_1C_1$։



Նկար 5.

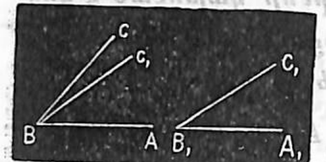
Բայց եթէ $\angle A_1B_1C_1$ (Նկար 6.) դնենք $\angle ABC$ մօտ, այնպէս, որ B_1 գագաթը միաւորվի B գագաթի հետ, $\angle B_1A_1$ կողմը միաւորվի BC կողմի հետ և B_1C_1 անցնի BC_1 գծի վերայով, որ գտնվում է ABC անկիւ-



Նկար 6.

նից դուրս, ապա կը կազմվի մի ABC_1 անկիւն, որ անուանվում է ABC և $A_1B_1C_1$ երկու անկեանց գումարը։

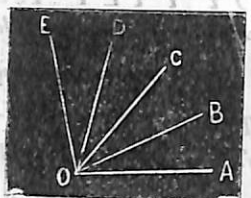
Դիցուք թէ $A_1B_1C_1$ անկիւնը (նկր. 7.) ABC անկիւնից փոքր է. դնենք առաջին անկիւնը երկրորդի վերայ այնպէս, որ B_1 գագաթը միաւորվի B գագաթի հետ,



Նկար 7.

A_1B_1 կողմը միաւորվի AB կողմի հետ, B_1C_1 կողմն անցնի BC_1 գծի վերայով, որ գտնվում է ABC անկեան մէջ, ապա կը կազմուի մի անկիւն CBC_1՝ որ անուանվում է ABC և $A_1B_1C_1$ երկու անկիւնների տարբերութիւն։

Եթէ O կետից (նկր. 8.) դուրս են գալիս մի քանի գծեր՝ OA, OB, OC, OD և OE, որք կազմում են հաւասար անկիւններ՝ AOB, BOC, COD, DOE, ապա AOC անկիւնը հաւասար է ABO անկեանը բազմապատկած երկու անգամ։ AOD անկիւնը հաւասար է AOB անկեանը բազմապատկած երեք անգամ և AOE անկիւնը հաւասար է AOB անկեանը բազմապատկած չորս անգամ։ Ընդհակառակը, AOB անկիւնը հաւասար է AOC անկեան կէսին,—AOD անկեան երրորդ մասին և—AOE անկեան չորրորդ մասին։

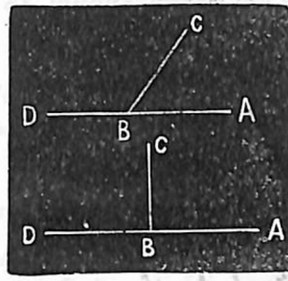


Նկար 8.

Այս ասածներից եզրակացնում ենք՝ թէ անկիւնները կարող են հետազօտուել որպէս քանակութիւններ, ուրեմն նոքա, որպէս և բոլոր քանակութիւնները, ենթարկվում են թուաբանական չորս գործողութեանց՝ գումարման, հանման, բազմապատկման և բաժանման։

§ 4. Երկու անկիւններ ABC եւ DBC (նկար 9), որք ունեն մի ընդհանուր գագաթ B, մի ընդհանուր կողմ BC եւ երկու միւս կողմերը BA եւ BD գտնվում են մի ուղիղ գծի վերայ, անուանվում են հարեւան կամ կից անկիւններ։

Երբ երկու կից անկիւններ հաւասար են միմեանց, ապա իւրաքանչիւրը նոցանից անուանվում է ուղիղ անկիւն (նկր. 10.)։ Ուրեմն ուղիղ անկիւնը է մէնը երկու հաւասար կից անկիւններից։ BC գիծը որ կազմում է AD գծի հետ ուղիղ անկիւններ, անուանվում է ուղղահայեաց գիծ. B կէտը, ուր կտրվում է ուղղահայեացը ուղիղ գծի հետ, անուանվում է ուղղահայեացի հիմք։



Նկար 9.

AD և BC երկու ուղիղ գծերի ուղղահայացութիւնը երբեմն նշանադրվում է այսպէս $BC \perp AD$։

Միւս բոլոր գծերը, որք ուղղահայեաց չեն մի ուրիշ գծի, անուանվում են թեք գծեր։

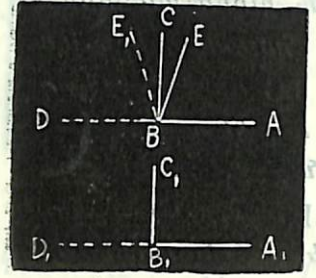
Անկիւնները, ուղիղ անկեանց հետ համեմատելով՝ լինում են սուր և բութ. ուղիղ անկիւնից փոքր անկիւնը անուանվում է սուր, իսկ մեծը—բութ անկիւն։

§ 5. Տեորեմայ։ Բոլոր ուղիղ անկիւնները հավասար են միմեանց։

Թող ABC և $A_1B_1C_1$ լինեն երկու ուղիղ անկիւններ (նկր. 11.). հարկաւոր է ապացուցել որ դոքա հաւասար են միմեանց։

Այլայ. Նկատենք, որ երբեմն մի որեւէ առաջարկութեան ճշմարտութիւնը արտայայտվում է ապացուցանելով դորա հակառակ առաջարկութեան անկարելիութիւնը. այսպէս օրինակի համար փոխանակ ապացուցանելու թէ ուղիղ անկիւնները հաւասար են միմեանց, կարելի է ապացուցել, որ ուղիղ անկիւնները չեն կարող միմեանցից մեծ կամ փոքր լինել. ապացուցութեան այս ձևը անուանվում է հակապացուցութիւն։

Թող ABC և $A_1B_1C_1$ (Նկր. 11.) երկու ուղիղ անկիւնները միմեանց անհաւասար լինեն, եթէ միայն կարելի է. և ենթադրենք, որ ABC անկիւնը մեծ է $A_1B_1C_1$ անկիւնից, շարունակելով BA և B_1A_1 կողմերը և նկատելով, որ ուղիղ անկիւնը է մինը երկու հաւասար կից անկիւններից (§4.), եզրակացնում ենք, որ ABC ուղիղ անկիւնը հաւասար է իւր կից DBC անկեանը, նմանապէս $A_1B_1C_1$ անկիւնը հաւասար է $D_1B_1C_1$ անկեանը։ Ենթադրելով, որ $A_1B_1C_1$ անկիւնը փոքր է ABC անկիւնից, անհերև է որ պէտք ենթադրենք, որ $D_1B_1C_1$ անկիւնը նոյնպէս փոքր է DBC անկիւնից։ Դնենք մի կից անկիւնը միւսի վերայ, այնպէս որ A_1D_1 գիծը ընկնի AD գծի վերայ և B_1 գագաթը B գագաթի վերայ. բայց որովհետև ենթադրել ենք, որ $A_1B_1C_1$ անկիւնը փոքր է ABC անկիւնից, ապա B_1C_1 կողմը կ՚երթայ ABC անկեան մէջ BE գծի ուղղութեամբ, միևնոյն ժամանակ $D_1B_1C_1$ անկիւնը լինելով փոքր DBC անկիւնից, այդ միևնոյն B_1C_1 գիծը պէտք գնայ CBD անկեան մէջ BE_1 գծի ուղղութեամբ։ Մի ուղիղ գիծ միևնոյն ժամանակ երկու ուղղութիւն չի կարող ունենալ. ուրեմն մեր ենթադրութիւնը սխալ էր։


Նկար 11.

Ինչպէս ABC անկիւնը չի կարող մեծ լինել $A_1B_1C_1$ ուղիղ անկիւնից, նոյն ձևով կ՚ապացուցենք, որ փոքր էլ չի կարող լինել։ Ուրեմն, եթէ ոչ մեծ կարող է լինել և ոչ փոքր, մնում է որ պէտք հաւասար լինեն։

Երբեմն փոխանակ գրելու ուղիղ անկիւն, գրում ենք d տառը։ Ուղիղ անկեան հետ, իբրև անփոփոխ քանակութեան հետ համեմատվում են միւս անկիւնները։

Այս § ապացուցած առաջարկութիւնից հետևում է. մի ուղիղ գծի մի կետում կարելի է կանգնեցնել միայն մի ուղղահայեաց գիծ ուղիղին, միւս բոլոր գծերը, որք անցնում են այդ կետի վերայով, կը կազմեն այդ ուղիղ գծի հետ սուր կամ բութ անկիւններ։

§ 6. Տեորեմայ. իւրաքանչիւր զոյգ կից անկիւնները հաւասար են երկու ուղիղ անկեանց։

Դիցուք թէ ABC և CBD (Նկր. 12.) կից անկիւններ են, պէտք ապացուցանել, որ

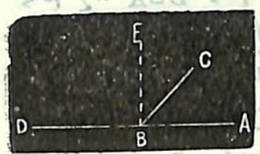
$$ABC+DBC=2\,d.$$

Ապաց. Երևակայենք, որ BE գիծը ուղղահայեաց է AD գծին. ապա կը ստանանք

$$ABC+CBE=d.\ DBE=d.$$

Գումարելով այս երկու հաւասարութիւնները և նկատելով, որ CBE և DBE անկիւնները ի միասին կազմում են մի անկիւն=DBC անկեան, կը գտնենք

$$ABC+DBC=2d.$$


Նկար 12.

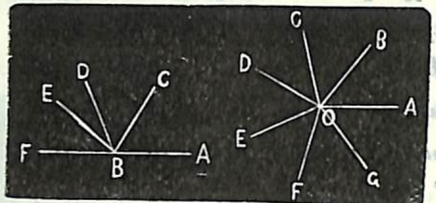
Այս առաջարկութիւնից հետևում է՝

1. Մի զոյգ հարևան անկիւնները հաւասար են միւս զոյգին.

2. Եթէ մինը երկու կից անկիւններից սուր է,

ապա միւսը պիտի լինի բութ և ընդհակառակը։

3. AF *գծի մի կողմը գտնուող* ABC, CBD, DBE, EBF (*Նկր. 13.*) *անկիւնների գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց, որովհետև նոքա միասին կազմում են մի զոյգ կից անկիւններ՝* ABC *և* CBF.

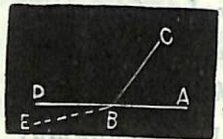


Նկար 13. և 14.

4. Մի կէտի չորս կողմը գտնուող AOB, BOC, COD, DOE, EOF, FOD *և* DOA (*Նկր. 14.*) *անկիւնների գումարը հաւասար է չորս ուղիղ անկեանց։*

Հ ա կ ա ռ ա կ Տ ե ո ր ե մ ա յ. Եթէ երկու անկիւն ունեն մի ընդհանուր գագաթ B, մի ընդհանուր կող՝ն BC եւ ի միասին վերցրած հաւասար են երկու ուղիղ անկեանց, ապա երկու միւս կողմերը BA եւ BD գտնվում են մի ուղիղ գծի վերայ եւ այդ պատճառաւ կից անկիւններ են։

Ապաց. Դիցուք թէ DBA *ոչ թէ ուղիղ, այլ կոտրած գիծ է և թող* AB *կողմի շարունակութիւնը լինի* BE *գիծը, այնպէս որ* ABC *և* EBC *լինեն կից անկիւններ. բայց որովհետև նախընթաց տեորեմայի համաձայն* ABC *և* DBC *անկեանց գումարը նոյնպէս հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց, ապա՝*



Նկար 15.

$$ABC + EBC = ABC + DBC;$$

Հանելով ABC *անկիւնը երկու կողմերից, կը գտնենք որ* EBC *և* DBC *անկիւնները հաւասար են միմեանց, որ անկարելի է, որովհետև* DBC *անկիւնը* EBC *անկեան միայն մի մասն է։*

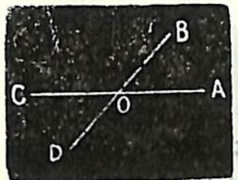
Ուրեմն, ենթադրելով որ DBA *ուղիղ գիծ չէ, գալիս ենք այն սխալ եզրակացութեանը, որ իբր թէ մասը հաւասար է իւր ամբողջին։*

§ 7. AOB եւ COD անկիւնները, նոյնպէս BOC եւ AOD անկիւնները (նկր. *16*), որք կազմուած են երկու հատուող ուղիղ գծերից, անուանվում են հ ա կ ա դ ի ր ա ն կ ի ւ ն ն ե ր։

Տ ե ո ր ե մ ա յ. Հակադիր անկիւնները հաւասար են միմեանց։

Թող AOB *և* COD *հակադիր անկիւններ լինեն, հարկաւոր է ապացուցանել, որ* ∠AOB=∠DOC.

Ապաց. Նկատելով որ AOB *և* AOD *անկիւնները կազմում են մի զոյգ կից անկիւններ, նոյնպէս և* AOD *և* DOC *անկիւններ, և որովհետև մի զոյգ կից անկիւնները հաւասար են միւս զոյգին, ապա.*



Նկար 16.

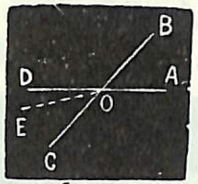
$$AOB + AOD = AOD + DOC.$$

Հաւասարութեան երկու կողմերից հանելով AOD *անկիւնը կը ստանանք* <AOB=<DOC.

Սոյն ձևով ապացուցվում է, որ BOC=AOD.

Հակառակ Տ ե ո ր ե մ ա յ. Եթէ երկու հաւասար անկիւններ AOB եւ COD (նկր. *17*) ունին մի ընդհանուր գագաթ O. եւ երկու կողմերը OB եւ OC միանալով կազմում են մի ուղիղ գիծ, ապա AO եւ OD միւս երկու կողմերն էլ կազմում են մի ուղիղ գիծ, ապա ուրեմն AOB եւ COD անկիւնները նակադիր են։

Ապաց. Դիցուք թէ AOD *ոչ թէ ուղիղ, այլ կոտրած* գիծ է և թող AO գծի շարունակութիւնը լինի EO գիծը,



Նկար 17

այն ժամանակ AOB և COD հակադիր անկիւններ կը լինեն և, ինչպէս ցոյց տուինք, հաւասար կը լինեն միմեանց։ Բայց տուած է DOC=AOB։ Ուրեմն EOC անկիւնը պիտի հաւասար լինի COD անկեանը, որ անկարելի է, որովհետև EOC միայն մի մասն է DOC անկեան։ Ուրեմն ենթադրելով որ AOD ուղիղ գիծ չէ, եկանք այն սխալ եզրակացութեանը, որ ամբողջը հաւասար է իւր մի մասին։

ԳԼՈՒԽ Բ.

ՁԵՒԵՐԻ ՄԱՍԻՆ.

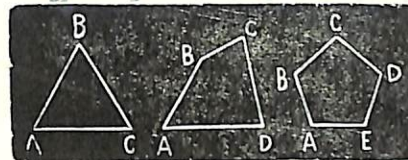
Ձևերի մասին ընդհանրապէս. Եռանկեաց հաւասարութիւնը. Ուղղահայեաց և թեք գծերի յատկութիւնները։

ՁԵՒԵՐԻ ՄԱՍԻՆ ԸՆԴՀԱՆՐԱՊԷՍ.

§ 8. Հարթութեան մի որոշեալ մասը, սահմանափակուած ամենայն կողմից գծերով, անուանվում է *ձև*։ Նորա սահմանը անուանվում է *պերիմետր* կամ *սահմանագիծ*։ Եթէ ձևը սահմանափակուած է ուղիղ գծերով, անուանվում է *ուղղագիծ ձև*, իսկ եթէ նա սահմանափակուած է մի կամ մի քանի կոր գծերով — *կորագիծ ձև*։ Ձևը սահմանափակող գծերը կոչվում են նորա *կողմերը*։

ABC ուղղագիծ ձևը (Նկր. 18) սահմանափակուած

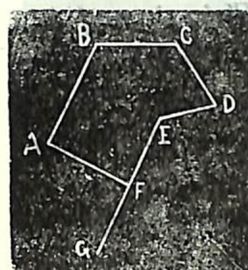
երեք գծերով՝ անուանվում է *եռանկիւնի*։ ABCD ձևը (Նկր. 19) սահմանափակուած չորս գծերով, անուանվում է *քառանկիւնի*։



Նկար 18. 19. 20.

ABCDE ձևը (Նկր. 20) սահմանափակուած հինգ գծերով՝ անուանվում է *հնգանկիւնի*։ Չորս գծերից աւելի ունեցող ձևը նոյնպէս անուանվում է *բազմանկիւնի*։

Երկու, միմեանց հետևող կողմերից բաղկացած անկիւնը անուանվում է *ներսի անկիւն* կամ առհասարակ *բազմանկիւնու անկիւն*։ Ինչպէս ABCDEF վեցանկիւնու մէջ (Նկր. 21) ABC անկիւնը։ Բայց այն անկիւնը, որ բաղկացած է բազմանկիւնու մի կողմից և նորան հետևող կողմի շարունակութիւնից, ինչպէս օրինակի համար AFG անկիւնը, անուանվում է *արտաքին անկիւն*։ Իսկ երբ բազմանկիւնու ներսի անկիւնը երկու ուղիղ անկիւնից աւելի մեծ է,

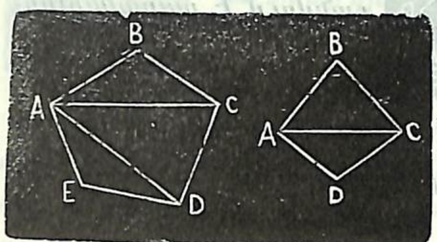


Նկար 21.

ինչպէս օրինակի համար E անկիւնը (Նկր. 21), ապա նա անուանվում է *դուրս ընկած անկիւն*։

Ակներև է, որ իւրաքանչիւր բազմանկիւնու մէջ նորա կողմերի թիւը հաւասար է անկիւնների թուին։

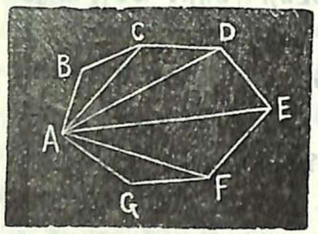
§ 9. Բազմանկիւնու մէջ *անկիւնագիծ* անուանվում է մի գիծ, որ միացնում է երկու անկեանց գագաթներ, որք միևնոյն կողմի վերայ չեն գտնվում։ Օրինակի համար AC գիծը (Նկր. 22)։ Պարզ բան է որ եռանկիւնին չունի անկիւնագիծ. քառանկիւնու ամեն մի անկիւնից կարելի է ձանց կացնել միայն մի անկիւնագիծ. օրինակի համար A գագաթից AC անկիւնագիծը (Նկր. 23). հինգանկիւնու իւրաքանչիւր գագաթից կարելի է անցկացնել երկու անկիւնագիծ. օրինակի համար A գագաթից (Նկ. 22)· AC և AD անկիւնագծերը և այլն։



Նկար 22. 23.

Բայց որովհետև ABCDEFG (Նկր. 24) բազմանկիւնու մի որ և իցէ A գագաթից կարելի է անցկացնել անկիւնագծեր դէպի միւս գագաթները՝ բացի իւր հարևան B և G երկու գագաթներից, ապա պարզ բան է, որ բազմանկիւնու իւրաքանչիւր անկիւնից կարելի է անցկացնել այնքան անկիւնագծեր, որքան կողմեր ունի բազմանկիւնին՝ առանց երեքի։

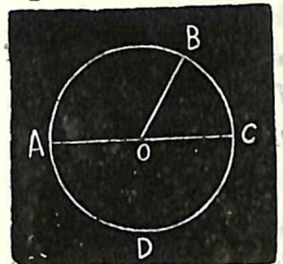
§ 10 Անկիւնագծերը, դուրս գալով բազմանկիւնու մի որ և իցէ A գագաթից (Նկր. 24) բաժանում են նորան եռանկիւնիների, որոնցից իւրաքանչիւրը պարունակում է իւր մէջ բազմանկիւնու մի կողմը, բացի ABC և AGF վերջին երկու եռանկիւնիներից, որք պարունակում են բազմանկիւնու կողմերից մի մի զոյգ։ Սորանից հետևում է, որ բազմանկիւնու մի գագաթից դուրս եկած անկիւնները բաժանում են նորան այնքան



Նկար 24.

եռանկիւնիների, որքան կողմեր ունի բազմանկիւնին՝ առանց երկուսի։ Օրինակի համար ABCD քառանկիւնին (Նկր. 23) բաժանվում է երկուսի։ ABCDE հինգանկիւնին (Նկր. 22)—երեք եռանկիւնու և այլն։

§ 11 Հարթ ձևը, սահմանափակուած ABCD կոր գծով, որի բոլոր կէտերը ունեն միևնոյն հեռաւորութիւնը նորա մէջը գտնուած O կէտից, անուանվում է շրջան, իսկ ինքը գիծը շրջանագիծ։ O կէտը, որ գտնվում է հաւասար հեռաւորութեան վերայ շրջագծի բոլոր կէտերից, անուանվում է կենդրոն։ AO գիծը միացնելով կենդրոնը շրջագծի մի որևիցէ կէտի հետ—շառաւիղ, իսկ AC գիծը անցնելով շրջագծի մի կէտից դէպի միւսը՝ կենդրոնի վերայով—տրամագիծ, շրջագծի մի որևիցէ մասը անուանվում է աղեղ։



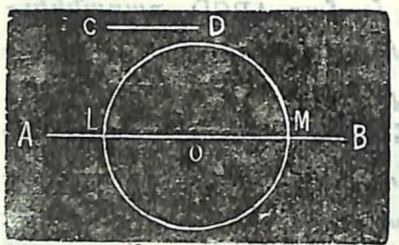
Նկար 25.

Իւրաքանչիւր տրամագիծ AC շրջանը բաժանում է երկու հաւասար մասի։ ABC և ADC։ Արդարև, եթէ ծալենք շրջանը AC տրամագծի վերայով, ապա ABC կտորը իւր բոլոր մասերով կը ծածկի ADC կտորին, որովհետև ABC և ADC աղեղների բոլոր կէտերը դասաւորուած են կենդրոնից հաւասար հեռաւորութեան վերայ։

Շրջանի որոշումից հետևում է, թէ շրջագիծն է երկրաչափական տեղ այն բոլոր կէտերի, որք ունեն հաւասար հեռաւորութիւն մի կէտից։

Շրջանը գծելու համար գործ են ածում մի առանձին գործիք կարկին անունով։ Կարկինի օգնութեամբ հեշտ լճավում է հետևեալ խնդիրը։ AB գծի վերայ (Նկր.

26), O կետից վերցնել CD գծին հաւասար մասը։ Դորա համար O կետից գըծում ենք շրջագիծ CD շառաւիղով, ապա շրջագիծը կը կտրէ AB գծին երկու տեղ L և M կետերում, որք գտնվում են O կետից CD գծին հաւասար հեռաւորութեամբ, այնպէս որ OL և OM հաւասար են CD գծին։

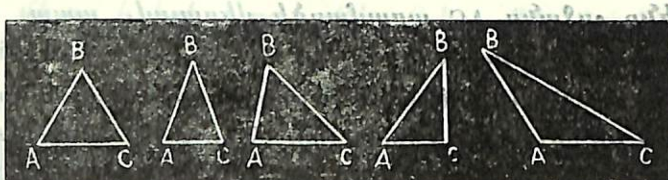


Նկար 26.

Շրջագիծը միակ կոր գիծն է, որ հետազօտվում է տարրական երկրաչափութեան մէջ։

ԵՌԱՆԿԻՒՆԻՆԵՐԻ ՀԱՒԱՍԱՐՈՒԹԻՒՆԸ

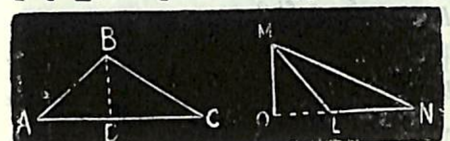
§ 12 ABC եռանկիւնին (նկր. 27), որի երեք կողմերը հաւասար են միմեանց, անուանվում է հաւասարակողմ։ ABC եռանկիւնին (նկր. 28), որի AB և CB երկու կողմերը հաւասար են միմեանց, անուանվում է հաւասարակողք կամ հաւասարասրունք։ Իսկ ABC եռանկիւնին (նկր. 29), որ բաղկացած է երեք անհաւասար կողմերից, անուանվում է անհավասարակողմ։ ABC եռանկիւնին (նկր. 30), ունենալով մի ուղիղ անկիւն C, անուանվում է ուղղանկիւն. եռանկիւնի AC և BC կողմերը, որք ներփակում են ուղիղ անկիւնը, անուան-



27 28 29 30 31

վում են էջեր կամ կատէտներ. իսկ AB կողմը, որ գտնվում է ուղիղ անկեան դիմաց—ներքնագիծ կամ հիպոտենուզայ։ Ուղիղ անկիւն չունեցող եռանկիւնին անուանվում է, ծուռ անկիւն եռանկիւնի։ Եթէ այդպիսի եռանկիւնու բոլոր անկիւնները սուր են, օրինակի համար. (նկր. 27 և 28), ապա անուանվում է սուր անկիւն եռանկիւնի։ Իսկ եթէ անկիւններից մինը բութ է—բութ անկիւն եռանկիւնի. ինչպէս ABC եռանկիւնին (նկր. 31), որ ունի մի A բութ անկիւն։

Եռանկիւնու մի որ և իցէ կողմը անուանվում է հիմք եռանկեան, իսկ հիմքին հակադիր անկեան գագաթը—եռանկեան գագաթ։ Հաւասարասրունք եռանկիւնու մէջ իբրև հիմք առհասարակ ընդունում են նորա անհաւասար կողմը։ Եռանկիւնու գագաթից դէպի իւր հիմքը կամ նորա շարունակութիւնը թողած ուղղահայեացը անուանվում է եռանկիւնու բարձրութիւն, այսպէս օրինակի համար եթէ ABC (նկր. 32) սուր անկիւն եռանկիւնու հիմքը ընդունենք նորա AC կողմը, ապա BD ուղղահայեացը, թողած եռանկիւնու



32 33

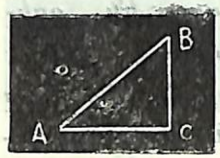
գագաթից դէպի իւր հիմքը, կը լինի եռանկիւնու բարձրութիւնը։ Իսկ եթէ MLN բութ անկիւն եռանկիւնու (նկր. 33) հիմքը ընդունենք նորա NL կողմը, ապա OM ուղղահայեացը, թողած եռանկիւնու գագաթից դէպի նորա հիմքի շարունակութիւնը՝ կը լինի եռանկիւնու բարձրութիւնը։

Երբեմն եռանկիւնի բառը կարճութեան համար

նշանագրվում է $\triangle$ նշանով։

§ *13*. Տեորեմա։ Իւրաքանչիւր եռանկիւնու մէջ երկու կողմերի գումարը մեծ է երրորդ կողմից։

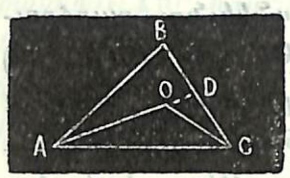
Ապաց. *Այս առաջարկութիւնը անմիջապէս հետեւում է § 1 ճշմարտութիւնից։ Դիցուք թէ* ABC *եռանկիւնու* AB *կողմը մեծ է* BC *կողմից (Նկ. 34) բայց որովհետև վերոյիշեալ առաջարկութեան հիման վերայ՝* $AC+CB>AB$, *ապա հանելով* CB *անհաւասարութեան երկու կողմերից, կը ստանանք* $AC>AB-CB$, *այսինքն եռանկիւնու իւրաքանչիւր կողմը մեծ է միւս երկու կողմերի տարբերութիւնից։*



Նկար 34

§ *14*. Լեմմա։ Եթէ ABC եռանկիւնու մէջ (Նկր. *35*) անց կացնենք AOC կոտրած գիծը, ապա $AB+BC>AO+OC$։

Ապաց. *Շարունակելով* AO *գիծը մինչև* BC *գծի հետ կտրուելը՝ նշանագրելով այդ կէտը* D *տառով, կը ստանանք* ABD *և* ODC *եռանկիւնիները, որոնց մէջ*



Նկար 35.

$$AB+BD>OA+OD. \quad OD+DC>OC։$$

Գումարելով այս երկու անհաւասարութիւնը և նկատելով որ BD *և* DC *կազմում են մի գիծ՝* BC, *կը ստանանք*

$$AB+BC+OD>AO+OD+OC.$$

և եթէ անհաւասարութեան երկու կողմերից հանենք OD, *կը ստանանք*

$$AB+BC>AO+OC,$$

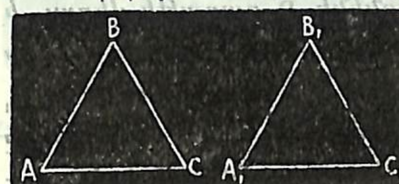
ինչ որ հարկաւոր՞էր ապացուցանել։

§ *15*. Տեորեմա։ Եթէ մի եռանկիւնու երկու կողմերը հաւասար են միւս եռանկիւնու համապատասխանող երկու կողմերին եւ այս կողմերի մէջ գտնված անկիւնները նոյնպէս հաւասար են միմեանց, ապա եռանկիւնիները եւս հաւասար են միմեանց։

Դիցուք թէ (Նկր. 36) $AB=A_1B_1$. $BC=B_1C_1$ *և* $\angle ABC=\angle A_1B_1C_1$, *հարկաւոր է ապացուցանել. որ* $\triangle ABC$ *հաւասար է* $\triangle A_1B_1C_1$։

Ապաց. *երկու մեծութիւնների հաւասարութիւնը արտայայտելու ամենահասարակ եղանակներից մինը կայանում է նրանում, որ մի մեծութիւն դնում են միւսի վերայ և համոզվում են թէ արդեօք նոքա իւրեանց բոլոր մասերով ծածկում են իրար՝ թէ ոչ։ Այս եղանակը անուանվում է վերադնելու եղանակ. իսկ նոյն մեծութիւնների ծածկուելը—կոնգրուենցիա*)։ Այս եղանակով ապացուցանենք* ABC *և* $A_1B_1C_1$ *եռանկիւնիների հաւասարութիւնը։*

$A_1B_1C_1$ *եռանկիւնին դնենք* ABC *եռանկիւնու վերայ, այնպէս որ* B_1 *գագաթը ընկնի* B *գագաթի վերայ և* B_1A_1 *կողմը—*BA *կողմի վերայ. հետևապէս* A_1B_1 *կողմը կ՚ընկնի* AB *կողմի վերայ. իսկ այդ կողմերի հաւասարութիւնից հետևում է որ* A_1 *և* C_1 *կէտերը կ՚ընկնեն* A *և* C *կէտերի վերայ. այսինքն* A_1C_1 *գիծն էլ կ՚երթայ* AC *գծի վերայով, որովհետև երկու*



Նկար 36.

*) *Երկու մեծութիւնների կոնգրուենցիան նշանագրվում է* $\cong$ *նշանով։*

կէտերի մէջ միայն մի ուղիղ գիծ կարելի է անց կացնել։ Ուրեմն ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիքը միմեանց ծածկեցին և հաւասար են։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ երկու կողմերը և նոցա մէջը գտնված անկիւնը բոլորովին որոշում են եռանկիւնին, որովհետև այս երեք մասերից կարելի է միայն մի եռանկիւնի կազմել։

§ *16.* Տեորեմայ։ Եթէ մի եռանկիւնու երկու անկիւնները հաւասար են միւս եռանկիւնու համապատասխան երկու անկեանց եւ այդ անկիւնները միացնող կողմերը նոյնպէս հաւասար են միմեանց, ապա հաւասար են եւ եռանկիւնիները։

Դիցուք թէ (Նկր. *36*) $\angle A=\angle A_1$, $\angle C=\angle C_1$ և $AC=A_1C_1$. հարկաւոր է ապացուցանել, որ $\triangle ABC$ հաւասար է $\triangle A_1B_1C_1$։

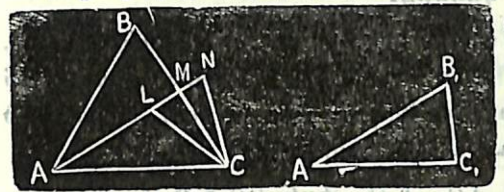
Ապաց. A_1B_1C եռանկիւնին դնենք ABC եռանկիւնու վերայ, այնպէս որ A_1C_1 կողմը ընկնի իւր հաւասար AC կողմի վերայ և A_1 գագաթը A գագաթի վերայ, ուրեմն B_1 գագաթը կ’ընկնի B գագաթի վերայ. և որովհետև A և A_1 անկիւնները հաւասար են, ապա A_1B_1 կ’երթայ AB կողմի վերայ. և որովհետև C և C_1 անկիւնները նոյնպէս հաւասար են, ապա C_1B_1 կողմը կ’երթայ CB կողմի վրայով. բայց որովհետև երկու ուղիղ գծեր կարող են կտրուիլ միայն մի կէտում, ապա B_1 գագաթը կ’ընկնի B գագաթի վերայ։ Ուրեմն ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիները կը ծածկեն միմեանց։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ մի կողմը և նորա վերայի երկու անկիւնները բոլորովին որոշում են եռանկիւնին, որովհետև այս երեք մասերից կարելի է միայն մի եռանկիւնի կազմել։

§ *17.* Լեմմայ։ Եթէ մի եռանկիւնու երկու կողմերը հաւասար են միւս եռանկիւնու համապատասխանող երկու կողմերին, բայց այս կողմերի մէջ գտնուած անկիւնները հաւասար չեն միմեանց, ապա մեծ անկեան դիմացը գտնվում է եւ մեծ կողմը։

Դիցուք թէ ABC և $A_1B_1C_1$ (Նկր. *37*) երկու եռանկիւնիների մէջ տուած է $A_1B_1=AB$, $AC=A_1C_1$. իսկ $\angle BAC>B_1A_1C_1$ անկիւնից, հարկաւոր է ապացուցանել, որ $BC>B_1C_1$։

Ապաց. $A_1B_1C_1$ եռանկիւնի դնենք ABC եռանկիւնու վերայ, այնպէս, որ A_1C_1 կողմը ընկնի իր հաւասար AC կողմի վերայ. որովհետև $B_1A_1C_1$ անկիւնը BAC անկիւնից փոքր է. այդ պատճառաւ A_1B_1 կողմը կը գնայ AN գծի ուղղութեամբ AC և AB կողմերի մէջ և B գագաթը կ’ընկնի կամ եռանկիւնու մէջ L կէտում, կամ BC գծի վերայ M կէտում, կամ եռանկիւնուց դուրս N կէտում տեսնենք այդ բոլոր դիպուածները առանձին առանձին։



Նկար *37.*

1. Դիպ. $A_1B_1C_1$ եռանկիւնին, դնելով ABC եռանկիւնու վերայ, ընդունում է ALC եռանկիւնու դիրքը՝

§ *14.* համաձայն ունենք

$$AB+BC>AL+LC.$$

բայց տուած էր, որ $AB=AL$։

Ուրեմն հանելով, կը ստանանք $BC>LC$։

2. Դիպ. $A_1B_1C_1$ եռանկիւնին, դնելով ABC եռանկէտերի մէջ միայն մի ուղիղ գիծ կարելի է անց կացնել։ Ուրեմն ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիքը միմեանց ծածկեցին և հաւասար են։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ երկու կողմերը և նոցա մէջը գտնված անկիւնը բոլորովին որոշում են եռանկիւնին, որովհետև այս երեք մասերից կարելի է միայն մի եռանկիւնի կազմել։

§ *16.* Տեօրեմա։ Եթէ մի եռանկիւնու երկու անկիւնները հաւասար են միւս եռանկիւնու համապատասխան երկու անկեանց եւ այդ անկիւնները միացնող կողմերը նոյնպէս հաւասար են միմեանց, ապա հաւասար են եւ եռանկիւնիները։

Դիցուք թէ (*նկր. 36*) $\angle A=\angle A_1$ $\angle C=\angle C_1$ *և* $AC=A_1C_1$. *հարկաւոր է ապացուցանել, որ* $\triangle ABC$ *հաւասար է* $\triangle A_1B_1C_1$։

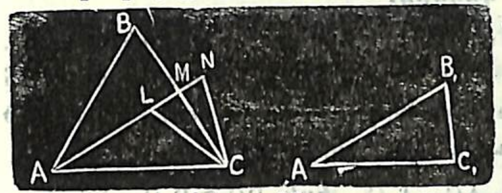
Ապաց. A_1B_1C *եռանկիւնին դնենք* ABC *եռանկիւնու վերայ, այնպէս որ* A_1C_1 *կողմը ընկնի իւր հաւասար* AC *կողմի վերայ և* A_1 *գագաթը* A *գագաթի վերայ, ուրեմն* B_1 *գագաթը կ'ընկնի* B *գագաթի վերայ. և որովհետև* A *և* A_1 *անկիւնները հաւասար են, ապա* A_1B_1 *կ'երթայ* AB *կողմի վերայ. և որովհետև* C *և* C_1 *անկիւնները նոյնպէս հաւասար են, ապա* C_1B_1 *կողմը կ'երթայ* CB *կողմի վրայով. բայց որովհետև երկու ուղիղ գծեր կարող են կտրուիլ միայն մի կէտում, ապա* B_1 *գագաթը կ'ընկնի* B *գագաթի վերայ։ Ուրեմն* ABC *և* $A_1B_1C_1$ *եռանկիւնիները կը ծածկեն միմեանց։*

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ մի կողմը և նորա վերայի երկու անկիւնները բոլորովին որոշում են եռանկիւնին, որովհետև այս երեք մասերից կարելի է միայն մի եռանկիւնի կազմել։

§ *17.* Լեմմա։ Եթէ մի եռանկիւնու երկու կողմերը հաւասար են միւս եռանկիւնու համապատասխանող երկու կողմերին, բայց այս կողմերի մէջ գտնուած անկիւնները հաւասար չեն միմեանց, ապա մեծ անկեան դիմացը գտնվում է եւ մեծ կողմը։

Դիցուք թէ ABC *և* $A_1B_1C_1$ (*նկր. 37*) *երկու եռանկիւնիների մէջ տուած է* $A_1B_1=AB$, $AC=A_1C_1$. *իսկ* $\angle BAC>B_1A_1C_1$ *անկիւնից, հարկաւոր է ապացուցանել, որ* $BC>B_1C_1$։

Ապաց. $A_1B_1C_1$ *եռանկիւնի դնենք* ABC *եռանկիւնու վերայ, այնպէս, որ* A_1C_1 *կողմը ընկնի իր հաւասար* AC *կողմի վերայ. որովհետև* $B_1A_1C_1$ *անկիւնը* BAC *անկիւնից փոքր է. այդ պատճառաւ* A_1B_1 *կողմը կը գնայ* AN *գծի ուղղութեամբ* AC *և* AB *կողմերի մէջ և* B *գագաթը կ'ընկնի կամ եռանկիւնու մէջ* L *կէտում, կամ* BC *գծի վերայ* M *կէտում, կամ եռանկիւնուց դուրս* N *կէտում*



Նկար 37.

տեսնենք այդ բոլոր դիպուածները առանձին առանձին։

1. Դիպ. $A_1B_1C_1$ *եռանկիւնին, դնելով* ABC *եռանկիւնու վերայ, ընդունում է* ALC *եռանկիւնու դիրքը՝*

§ *14. համաձայն ունենք*

$$AB+BC>AL+LC։$$

բայց տուած էր, որ $AB=AL$։

Ուրեմն հանելով, կը ստանանք $BC>LC$։

2. Դիպ. $A_1B_1C_1$ *եռանկիւնին, դնելով* ABC *եռան-*

կիւնու վերայ, ընդունում է ANC եռանկիւնու դիրքը։ Այս դիպուածում ուղղակի երևում է, որ BC>MC։

3. Դիպ. $A_1B_1C_1$ եռանկիւնին. դնելով ABC եռանկիւնու վերայ, ընդունում է AMC եռանկիւնու դիրքը։

AMB և CMN եռանկիւնիներից ունենք, որ

$$AM+MB>AB \text{ և } NM+MC>MC.$$

գումարելով այս անհաւասարութիւնները կը ստանանք

$$AM+MB+NM+MC>AB+NC.$$

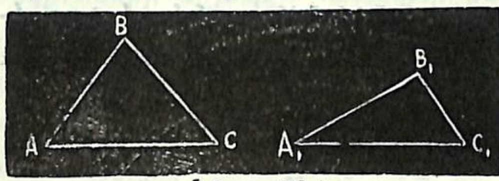
նկատելով որ MB+MC հաւասար է BC գծին և AM+MN հաւասար է AN գծին, կը ստանանք AN+BC>AB+NC

Բայց տուած է AN=AB, ուրեմն հանելով կը ստանանք BC>NC։

Այսպէս ուրեմն, բոլոր դիպուածներում էլ BC կողմը մեծ է B_1C_1 կողմից։

Հակառակ Տեօրեմայ։ Եթէ մի եռանկիւնու երկու կողմերը հաւասար են միւս եռանկիւնու համապատասխան կողմերին, բայց երրորդ կողմերը հաւասար չեն, ապա մեծ կողմի դիմացը գտնվում է մեծ անկիւնը։

Թող $AB=A_1B_1$. $AC=A_1C_1$ իսկ $BC>B_1C_1$. հարկաւոր է ապացուցանել, որ $A<A_1$ անկիւնից։

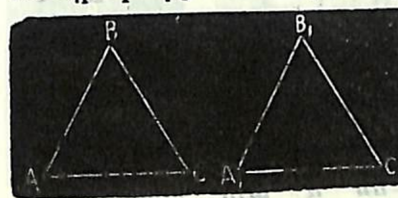


Նկար 38.

Ապաց. A անկիւնը չի կարող A_1 անկիւնից փոքր լինել, որովհետև այն ժամանակ, համաձայն նախընթաց տեօրեմայի, BC կողմը նոյնպէս փոքր կը լինի B_1C_1 կողմից, որ հակառակ է մեր առաջարկութեանը։ Բայց A անկիւնը հաւասար էլ չի կարող լի-

նել A_1 անկեանը, որովհետև այն ժամանակ CAB և $C_1A_1B_1$ եռանկիւնիները ունենալով մի մի հաւասար անկիւններ սահմանափակուած հաւասար կողմերով, համաձայն § 15, հաւասար կլինէին և ուրեմն $BC=B_1C_1$ որ նոյնպէս հակառակ է մեր առաջարկութեանը. ուրեմն է մնում, որ A անկիւնը մեծ լինի A_1 անկիւնից։

§ 18. Տեօրեմայ։ Եթէ մի եռանկիւնու երեք կողմերը հաւասար են միւս եռանկիւնու երեք կողմերին, ապա և եռանկիւնիները հաւասար են միմեանց։



Նկար 36.

Թող (Նկր. 36) $AB=A_1B_1$. $AC=A_1C_1$ և $BC=B_1C_1$. հարկաւոր է ապացուցանել, որ ABC եռանկիւնին հաւասար է $A_1B_1C_1$ եռանկիւնուն։

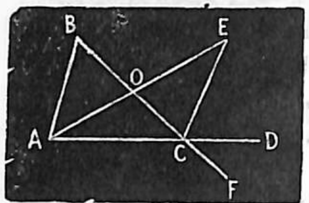
Ապաց. A և A_1 երկու համապատասխանող անկիւնները, որք գտնվում են միմեանց հաւասար կողմերի դիմացը, համաձայն նախընթաց § չեն կարող հաւասար չլինել, ապա ուրեմն ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիները, ունենալով երկու կողմերը և նոցա մէջը գտնուած անկիւնները միմեանց հաւասար, համաձայն § 15, պիտի հաւասար լինեն միմեանց։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ երեք կողմերը բոլորովին որոշում են եռանկիւնին, որովհետև այս երեք մասերից կարելի է կառուցանել միայն մի եռանկիւնի։

§ 19 Տեօրեմայ։ Ամեն մի եռանկիւնու մէջ արտաքին անկիւնը աւելի մեծ է քան իւրաքանչիւրը ներքին անկիւններից, որք նորա հետ կից չեն։

Թող ABC եռանկիւնու արտաքին անկիւնը լինի BCD (Նկր. 39), հարկաւոր է ապացուցանել, որ BCD անկիւնը աւելի մեծ է քան ABC և CAB անկիւնները առանձին առանձին վերցրած։

Ապաց. Թող O կէտը լինի BC կողմի մէջ տեղը, անցկացնենք A և O կէտերից ուղիղ գիծ և վերցնենք

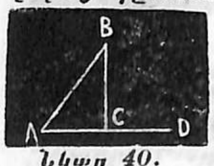


Նկար 39.

նորա վերայ OE=AO, վերջապէս միացնենք E և C կէտերը՝ AOB և COE եռանկիւնիների մէջ BOA և EOC անկիւնները, որպէս հակադիր անկիւններ հաւասար են, բացի այդ BO=OC և AO=OE, ուրեմն այս եռանկիւնիները համաձայն § 15, հաւասար են և այդ պատճառաւ OCE անկիւնը հաւասար է ABO անկեանը, ուրեմն BCD անկիւնը մեծ է ABC անկիւնից։

Նկատենք նոյնպէս, որ եթէ AC կողմի փոխարէն շարունակենք BC կողմը. ապա, ինչպէս առաջ, կ'ապացուցանենք որ ACF արտաքին անկիւնը մեծ է BAC ներքին անկիւնից, բայց BCD=ACF անկեանը, որպէս հակադիր անկիւններ (§ 7), ուրեմն BCD անկիւնը մեծ է BAC անկիւնից։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ իւրաքանչիւր ուղղանկիւն եռանկիւնու մէջ, ներքնագծի վերայ գտնուած երկու անկիւններն էլ սուր են։ Արդարև ABC (Նկր. 40) ուղղանկիւն եռանկիւնու մէջ, շարունակելով AC էջը, կը գտնենք, որ CAB և ABC անկիւնները փոքր են BCD արտաքին անկիւնից,



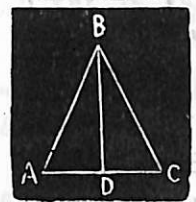
Նկար 40.

այսինքն փոքր են ուղիղ անկիւնից։

§ 20. Տեորեմայ։ Հաւասարասրունք եռանկիւնու մէջ հիմքի վերայ գտնված անկիւնները հաւասար են միմեանց։

Ենթադրենք թէ ABC եռանկիւնու մէջ (Նկր. 41) AB կողմը հաւասար է BC կողմին, հարկաւոր է ապացուցանել, որ ∠A=∠C։

Ապաց. Բաժանելով AC հիմքը երկու հաւասար մասերի և բաժանող D կէտը միացնելով B գագաթի հետ, կը կազմենք երկու եռանկիւնիներ ABD և CBD

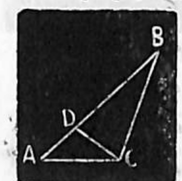


Նկար 41.

որոնց կողմերը համապատասխանաբար հաւասար են, որովհետև BD կողմը ընդհանուր է, AD=DC, այդ պատճառաւ այդ երկու եռանկիւնիները հաւասար են, իսկ դորանից հետևում է որ A անկիւնը հաւասար է C անկեանը։

Ակներև է, որ համաձայն այս առաջարկութեան, հաւասարակողմն եռանկիւնու մէջ բոլոր երեք անկիւնները հաւասար են միմեանց։

§ 21. Տեորեմայ։ Իւրաքանչիւր եռանկիւնու մէջ մեծ կողմի դիմացը, գտնվում է մեծ անկիւնը։



Նկար 42.

Թող AB>BC (Նկր. 42). հարկաւոր է ապացուցանել, որ ACB>BAC անկիւնից։

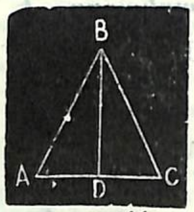
Ապաց. Վերցնենք AB մեծ կողմի վերայ BD մասը հաւասար BC կողմին և միացնենք D և C կէտերը։ BDC հաւասարասրունք եռանկիւնու մէջ, համաձայն § 20, BCD անկիւնը հաւասար է BDC անկեանը, ուրեմն ACB անկիւնը մեծ է BDC անկիւնից. իսկ BDC անկիւնը որպէս արտաքին անկիւն ADC եռանկիւնու համար, մեծ է CAD անկիւնից (§ 19), ապա ուրեմն ACB անկ.>CAB անկիւնից։

Հակառակ Տեորեմայ։ Իւրաքանչիւր եռանկիւնու մէջ մեծ անկիւնու դիմացը գտնվում է մեծ կողմը։

Թող ACB անկիւնը>ABC անկիւնից (նկր. 42), հարկաւոր է ապացուցանել, որ AB կողմը մեծ է BC կողմից։

Ապաց. Պարզ բան է որ AB չի կարող հաւասար լինել BC կողմին, որովհետև այն ժամանակ △ ABC կը լինէր հաւասարասրունք եռանկիւնի և ACB անկիւնը հաւասար կը լինէր BAC անկեանը (§ 20), որ հակառակ է առաջարկութեանը, Բայց AB չի կարող և փոքր լինել BC կողմից, որովհետև այն ժամանակ ACB կը լինէր փոքր BAC անկիւնից, որ նոյնպէս հակառակ է առաջարկութեանը, ուրեմն AB կողմը պիտի մեծ լինի BC կողմից,

§ 22. Տեորեմայ։ Մի եռանկիւնու մէջ, երև երկու անկիւնները հաւասար են միմեանց, ապա նոցա դիմացի կողմերն էլ հաւասար են միմեանց։



Նկար 41.

Ենթադրենք թէ ABC եռանկիւնու մէջ (նկր. 41) A անկիւնը հաւասար է C անկեանը, հարկաւոր է ապացուցանել, որ AB=BC, այսինքն ABC եռանկիւնին հաւասարասրունք է։

Ապաց. Եթէ AB և BC կողմերը հաւասար չլինէին, ապա համաձայն § 21, A և C անկիւնները եւ հաւասար չէին լինի, որ հակառակ է առաջարկութեանը. այդ պատճառաւ AB և BC կող-

մերը պիտի հաւասար լինեն։

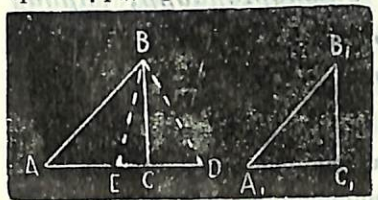
Պարզ բան է, որ երեք հաւասար անկիւններ ունեցող եռանկիւնին, հաւասարակողմն եռանկիւնի է, համաձայն նախընթաց առաջարկութեան։

§ 23. Որովհետև բոլոր ուղղանկիւն եռանկիւնիները ունեն մի մի հաւասար անկիւններ, այն է ուղիղ անկիւնը, ապա երկու ուղղանկիւն եռանկիւնիներ հաւասար են միմեանց։

1. Երբ մի եռանկեան էջերը հաւասար են միւսի էջերին (§ 15).

2. Երբ մի եռանկիւնու էջերից մինը և իւր մօտի սուր անկիւնը հաւասար են միւսի էջերից մինին և մօտի սուր անկեանը (§ 16)։

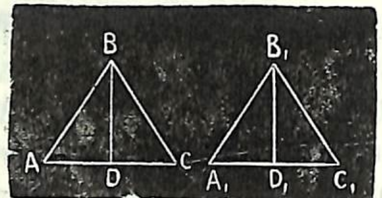
§ 24. Տեորեմայ։ Երե մի ուղղանկիւն եռանկիւնու ներքնագիծը եւ սուր անկիւններից մինը համապատասխանաբար հաւասար են միւս եռանկիւնու ներքնագծին եւ սուր անկիւններից մինին, ապա եռանկիւնիները հաւասար են միմեանց։



Նկար 43.

Ենթադրենք թէ ABC և $A_1B_1C_1$ ուղղանկիւն եռանկիւնիների մէջ (նկր. 43) $AB=A_1B_1$ և $\angle A=\angle A_1$ հարկաւոր է ապացուցանել, որ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$։

Ապաց. $A_1B_1C_1$ եռանկիւնին դնենք BAC եռանկիւնու վերայ, այնպէս որ A_1B_1 կողմն ընկնի իւր հաւասար AB կողմի վերայ, A և A_1 անկիւնները հաւասար լինելով, A_1C_1 կողմը կ'երթայ AC կողմի վերայ, իսկ B_1C_1 կողմը այդ ժամանակ չի կարող գնալ եռանկեան մէջ. օրինակի համար BE գծի ուղղութեամբ, որովհետև այն ժամանակ ∠EB անկիւնը, որպէս արտաքին անկիւն, կը լինէր մեծ ECB ուղիղ անկիւնից (§ 19), որ հակառակ է առաջարկութեանը, բայց և B_1C_1 կողմը չէ էլ կարող գնալ եռանկիւնուց դուրս, ինչպէս BD գիծը, որովհետև այն ժամանակ BDC անկիւնը կը լինէր փոքր ACB արտաքին անկիւնից, այսինքն ուղիղ անկիւնից, որ նոյնպէս հակառակ է առաջարկութեանը։ Ուրեմն B_1C_1 կողմը կ՚երթայ BC կողմի վերայով և երկու եռանկիւնիքը կը ծածկուեն, ինչ որ հարկաւոր էր ապացուցել։



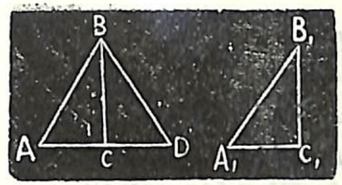
Նկար 44.

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ ABC և $A_1B_1C_1$ երկու հաւասար եռանկեանց մէջ BD և B_1D_1 բարձրութիւնները հաւասար են, որովհետև ABD և $A_1B_1D_1$ ուղղանկիւն եռանկիւնիները, որոնց մէջ $\angle A=\angle A_1$ և $AB=A_1B_1$, հաւասար են միմեանց համաձայն նախընթաց տեորեմայի։

§ 25 Տեորեմայ։ Երբ մի ուղղանկիւն եռանկեան ներքնագիծը և էջերից մինը հաւասար են միւս ուղղանկիւն եռանկեան ներքնագծին և համապատասխանող էջին. այս եռանկիւնիները հաւասար են միմեանց։

Ենթադրենք թէ ABC և $A_1B_1C_1$ ուղղանկիւն եռանկեանց մէջ (նկար 45) $AB=A_1B_1$ և $BC=B_1C_1$, հարկաւոր է ապացուցել, որ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

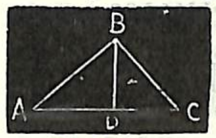
Ապաց. $\triangle A_1B_1C_1$ դնենք $\triangle ABC$ մօտ այնպէս, որ B_1C_1 կողմն ընկնի իւր հաւասար BC կողմի վերայ և $\triangle A_1B_1C_1$ ընդունի BCD դիրքը. CD գիծը կլինի շարունակութիւն AC գծի, որովհետև BCD անկիւնը հա-



Նկար 45.

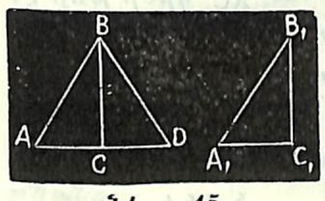
ւասար է ուղիղ անկեանը (§6)։ ABD եռանկիւնին, որտեղ տուած է $AB=BD$, հաւասարասրունք է. ուրեմն համաձայն § 20, $\angle A=\angle D$, և որովհետև $\angle D=\angle A_1$, ապա $\angle A=\angle A_1$։ Սորանից հետևում է, որ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիները, ունենալով հաւասար ներքնագծեր և մի մի հաւասար սուր անկիւններ, հաւասար են միմեանց,

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ ABC հաւասարասրունք եռանկեան մէջ (նկր 46) նորա գագաթից դէպի հիմքը թողած ուղղահայեացը բաժանում է հիմքը և գագաթի անկիւնը երկու հաւասար մասերի, որովհետև ABD և CBD ուղղանկիւն եռանկիւնիները, ունենալով AB և BC ներքնագծերը հաւասար միմեանց և BD ընդհանուր էջ, հաւասար են միմեանց, համաձայն նախընթաց առաջարկութեան։



Նկար 46.

§ 26 Տեորեմայ։ Երբ մի ուղղանկիւն եռանկեան էջերից մինը և նորա հանդէպ գտնված սուր անկիւնը հաւասար են միւս եռանկեան էջերից մինին և նորա հանդէպ գտնուած սուր անկեանը, ապա և եռանկիւնիները հաւասար են միմեանց։



Նկար 45.

Ենթադրենք թէ ABC և $A_1B_1C_1$ ուղղանկիւն եռանկեանց մէջ (նկր. 45) $BC=B_1C_1$ և $A=A_1$. հարկաւոր է ապացուցել, որ $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$։

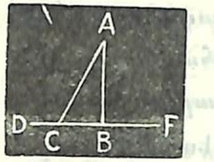
Ապաց. $A_1B_1C_1$ եռանկիւնին դնենք ABC եռանկեան մօտ, ինչպէս առաջ, այսինքն այնպէս որ, նա *ընդունի* BCD *եռանկեան դիրքը։* ABD *եռանկեան մէջ տուած է* A=D*, ուրեմն* § *22 համաձայն,* AB=BD. *բայց որովհետև* $BD=A_1B_1$*, ապա* $AB=A_1B_1$. *սորանից հետևում է, որ* ABC *և* $A_1B_1C_1$ *եռանկիւնիները, որոնց մէջ* $AB=A_1B_1$, $A=A_1$*, հաւասար են միմեանց* § *24 համաձայն։*

Ուղղանկիւն եռանկեանց յատկութիւններից շատ հեշտ կերպով դուրս ենք բերում ուղղահայեաց եւ թեք գծերի յատկութիւնները։

ՈՒՂՂԱՀԱՅԵԱՑ ԵՒ ԹԵՔ ԳԾԵՐԻ ՅԱՏԿՈՒԹԻՒՆՆԵՐԸ։

§ *27.* Տեօրեմայ։ Տուած կէտից դէպի մի ուղիղ գիծ կարելի է անց կացնել միայն մի ուղղահայեաց։

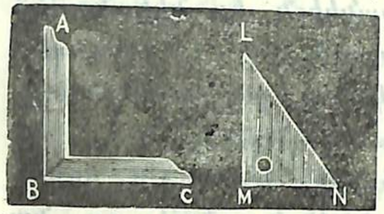
Ենթադրենք թէ A *կէտից (նկար 47) թողած է* DF *գծին* AB *ուղղահայեացը. հարկաւոր է ապացուցել, որ մի ուրիշ* AC *գիծ, անց կացրած* A *կէտից, չէ կարող ուղղահայեաց լինել* DF *գծին։*



Նկար 47.

Ապաց. Նկատելով որ ABC *եռանկիւնու մէջ տուած է* B *հաւասար մի ուղիղ անկեան, եզրակացնում ենք (*§ *19. հետև), որ* ACB *անկիւնը սուր է, ապա ուրեմն* AC *գիծը թեք է։*

Նկատողութիւն։ Ուղղահայեաց գծեր անց կացնելու համար գործ են ածում կամ ABC *գործիքը (նկար 48) որ բաղկացած է երկու քանոններից, որոնք կազմում են ուղիղ անկիւն, կամ* MLN *գործիքը (նկար*



Նկար 48 և 49.

49), որ բաղկացած է մետաղեայ կամ փայտեայ տախտակից ուղղանկիւն եռանկեան ձևով։

§ *28.* Տեօրեմայ։ Ուղղահայեացը կարճ է բոլոր թեք գծերից։

Ենթադրենք թէ AB *(նկար 47) մի ուղղահայեաց է, թողած* A *կէտից դէպի* DF *ուղիղ գիծը և* AC *մի որ և իցէ թեք գիծ է. հարկաւոր է ապացուցել, որ* AC>AB*։*

Ապաց. ABC *ուղղանկիւն եռանկեան մէջ, համաձայն* § *19,* C *անկիւնը փոքր է* B *անկիւնից, ուրեմն* AC>AB (§ *21).*

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ իւրաքանչիւր ուղղանկիւն եռանկեան մէջ էջերից ամեն մէկը փոքր է ներքնագծից։

Որովհետև կէտի և ուղիղ գծի ամենակարճ ճանապարհը ուղղահայեաց գիծն է, ապա ուղիղ գծի և կէտի հեռաւորութիւնը որոշվում է ուղղահայեացով, թողած կէտից դէպի ուղիղ գիծը։

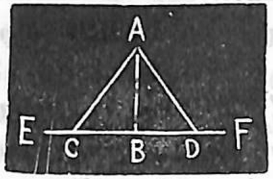
Հակառակ Տեօրեմայ։ Կէտից դէպի ուղիղ գիծը ամենակարճ ճանապարհը է ուղղահայեաց գիծը տուած գծին։

Թող AB *(նկար 47) լինի կարճ ճանապարհը* A *կէտից դէպի* DF *գիծը հարկաւոր է ապացուցել, որ* AB *ուղղահայեաց է* DF *գծին,*

Ապաց. Եթէ ոչ թէ AB*, այլ մի ուրիշ* AC *գիծ լինէր ուղղահայեաց* DF *գծին, ապա* AC *կը լինէր աւելի փոքր քան թէ* AB*, որ հակառակ է առաջարկութեանը։*

§ *29.* Տեօրեմայ։ Հաւասար թեք գծերը հաւասար հեռաւորութիւն ունեն ուղղահայեացից։

Ենթադրենք, թէ AB (նկար 50) մի ուղղահայեաց է թողած A կէտից դէպի EF գիծը, իսկ AC և AD թեք գծերը հաւասար են միմեանց, հարկաւոր է ապացուցել որ $CB=BD$։



Նկար 50.

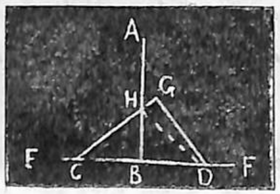
Ապաց. Որովհետև ABC և ABD ուղղանկիւն եռանկիւնները ունեն մի ընդհանուր AB էջ, իսկ AC և AD հաւասար ներքնագծեր, ապա § 25 համաձայն, եռանկիւնները հաւասար են, ապա ուրեմն $CB=BD$։

Հակառակ տեօրեմայ։ Ուղղահայեացից հաւասար հեռաւորութիւն ունեցող թեք գծերը հաւասար են միմեանց։

Ենթադրենք թէ $CB=BD$ (նկար 50), հարկաւոր է ապացուցել, որ $AC=AD$։

Ապաց. Որովհետև ABC և ABD ուղղանկիւն եռանկիւնները ունեն AB ընդհանուր էջ և միւս CB և BD էջերն էլ հաւասար են, ապա այդ եռանկիւնները հաւասար են, համաձայն § 23, և այդ պատճառաւ $AC=AD$։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ GC և GD (նկր. 51) թեք գծերը, որք հաւասար հեռացած են AB ուղղահայեացից, բայց անց են կացրած G կէտից որ ուղղահայեացի վերայ չէ գտնվում, միմեանց հաւասար չեն։



Նկար 51.

Արդարև, միացնելով H և D կէտերը, կը գտնենք GHD եռանկիւնուց։

$$GH+HD>GD.$$

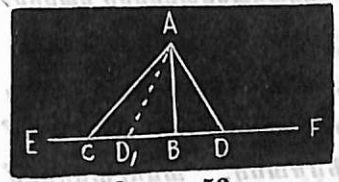
բայց HC և HD թեք գծերը

հաւասար հեռացած են ուղղահայեացից, ուրեմն հաւասար են միմեանց, այդ պատճառաւ $GH+HC>GD$ կամ $GC>GD$։

Նոյն իսկ այս առաջարկութիւնից հետևում է նոյնպէս, որ մի գծի մէջտեղից անցկացրած ուղղահայեացը է երկրաչափական տեղ այն կէտերի, որք հաւասար հեռացած են նորա երկու ծայրերից։

§ 30. Տեօրեմայ։ Թեք գծերից նա է երկար, որ աւելի հեռու է ուղղահայեացից։

Ենթադրենք թէ A կէտից (նկր. 52) թողած է AB ուղղահայեացը EF գծին և երկու թեք գծեր AD և AC այնպէս, որ $BC>BD$. հարկաւոր է ապացուցել, որ $AC>AD$։



Նկար 52.

Ապաց. Վերցնենք $BD_1=BD$ և միացնենք A և D_1 կէտերը, կը գտնենք $AD_1=AD$ (§ 29). բայց ACB անկիւնը ուղիղից փոքր է, որպէս CAB ուղղանկիւն եռանկեան սուր անկիւն, իսկ AD_1C անկիւնը որպէս արտաքին անկիւն AD_1B ուղղանկիւն եռանկեան, մեծ է ուղիղ անկիւնից, ուրեմն ACD_1 եռանկիւնու մէջ AD_1C անկիւնը մեծ է ACD_1 անկիւնից և այդ պատճառաւ $AC>AD_1$ կամ $AC>AD$, համաձայն § 21։

Հակառակ տեօրեմայ։ Երկու թեք գծերից նա աւելի երկար է, որ աւելի հեռու է ուղղահայեացից։

Դիցուք թէ $AC>AD$ (նկր. 52). հարկաւոր է ապացուցել որ $CB>BD$։

Ապաց. Պարզ բան է, որ CB չի կարող հաւասար լինել BD, որովհետև այն ժամանակ, § 29 համաձայն, AC=AD, որ հակառակ է առաջարկութեանը, բայց և CB չի կարող BD փոքր լինել, որ նոյնպէս հակառակ է առաջարկութեանը, ուրեմն BC երկար է BD գծից։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է որ տուած կետից կարելի է քաշել միայն երկու թեք գծեր, միմեանց հաւասար։

ԳԼՈՒԽ Դ.

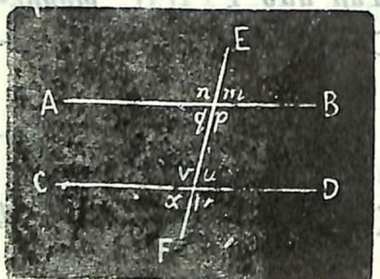
ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ԳԾԵՐ

Զուգահեռական գծերի տեսութիւնը, նորա մի քանի հետեւանքները. Զուգահեռակողմերի եւ սեղանանմանների մասին։

ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ԳԾԵՐ

Երկու գիծ AB *և* CD (*Նկր.* 53), *որք գտնվում են մի հարթութեան վերայ և շարունակուելով այս կամ այն կողմը՝ չեն հանդիպում միմեանց, անուանվում են զուգահեռական գծեր։*

Եթէ AB *և* CD *զուգահեռական գծերը կտրենք* EF *թեք գծով, որին անուանենք հատող գիծ, ապա կը գոյանան* m, n, p, q, u, v, w, *և* x, *ութ անկիւնները, որոնցից* m, n, w, *և* x, *անուանվում են արտաքին անկիւններ, իսկ* p, q, u, *և* v *ներքին, իսկ իւրաքանչիւր զոյգ անկիւններ կրում են առանձին առանձին անուններ, այս-*



Նկար 53.

պէս m, *և* w, *կամ* q, *և* x, *որք գտնվում են կտրող գծի մի կողմը, անուանվում են միակողմանի անկիւններ, իսկ* p *և* w *կամ* n *և* w—*խաչադիր անկիւններ։*

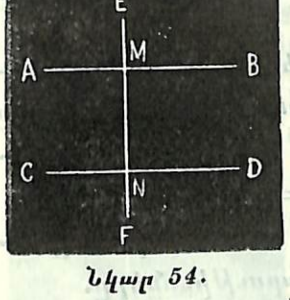
Երկու միակողմանի անկիւնները, որոնցից մինը արտաքին է, իսկ միւսը ներքին, ինչպէս օրինակի համար m *և* u *անկիւնները անուանվում են համապատասխան անկիւններ։*

Երբեմն զուգահեռական բառի տեղ գործ են ածում || *նշանը։ Օրինակի համար* AB || CD *կը նշանակէ* AB *և* CD *գծերը զուգահեռական են։*

§ *32*. Տեորեմայ։ Երկու գիծ, ուղղահայեաց լինելով երրորդին, զուգահեռական են միմեանց։

Դիցուք AB *և* CD *գծերը* (*Նկր.* 54) *ուղղահայեաց են* EF *գծին, հարկաւոր է ապացուցել, որ* AB *և* CD *գծերը զուգահեռական են։*

Ապաց. Եթէ AB *և* CD *գծերը շարունակուելով հանդիպէին միմեանց, ապա հանդիպման կետից դէպի* EF *գիծը պիտի ցած իջնէին երկու ուղղահայեաց գծեր, որ հակառակ է* § *27*։

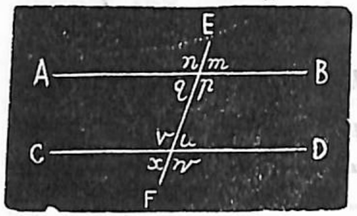


Նկար 54.

§ *33*. Տեորեմայ։ Երկու գիծ, հատուելով երրորդ գծով, զուգահեռական են, երբ ներքին խաչադիր անկիւնները հաւասար են միմեանց։

Դիցուք q=u (*Նկր.* 53) *պիտի ապացուցել որ* AB || CD։

Ապաց․ Եթէ AB և CD գծերը շարունակուելով հանդիպէին միմեանց, ապա կը կազմուէր եռանկիւնի որոյ համար q և u անկիւններից մինը կը լինէր արտաքին. անկիւն, իսկ միւսը ներքին․ ուստի AB և CD գծերը հատուելու ժամանակ, եռանկիւնու արտաքին անկիւնը հաւասար կը լինէր ներքին անկեանը, որ հակառակ է § 11։



Նկար 53.

Այս առաջարկութիւնից հետևում է.

1. AB և CD գծերը զուգահեռական են, եթէ արտաքին խաչաձև անկիւնները, օրինակի համար m և x, հաւասար են, որովհետև m=x հետևում է որ q=u։

2. AB և CD գծերը զուգահեռական են, երբ համապատասխան անկիւնները օրինակի համար m և u հաւասար են, որովհետև m=u հետևում է որ q=u։

3. AB և CD գծերը զուգահեռական են, եթէ երկու ներքին միակողմանի անկիւնների գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեան, օրինակի համար p և u հաւասար են 2d, որովհետև սորանից հետևում է որ p+u=p+q կամ u=q։

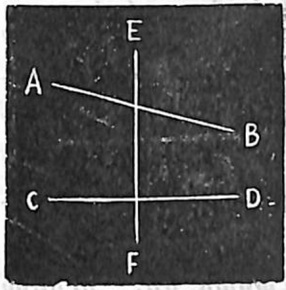
4. AB և CD գծերը զուգահեռական են, եթէ երկու արտաքին միակողմանի անկիւնների գումարը հաւասար է 2d. օրինակի համար m+w=2d, որովհետև սորանից հետևում է, որ u=m.

5. Եթէ m, n, p, q, u, v, w և x ութ անկիւններից կազմենք հետևեալ հաւասարութիւնները.

q=u	m=x	p=v	n=w
q+v=2d	m+v=2d	p+u=2d	n+x=2d
q=x	m=u	p=w	n=v
q+w=2d	m+w=2d	p+x=2d	n+u=2d,

ապա պարզ բան է, որ այս հաւասարութիւնից իւրաքանչիւրը պայմանաւորում է միւսներին, ուրեմն AB և CD գծերը զուգահեռական են, եթէ գոնէ, մինը այս հաւասարութիւններից գոյութիւն ունի։

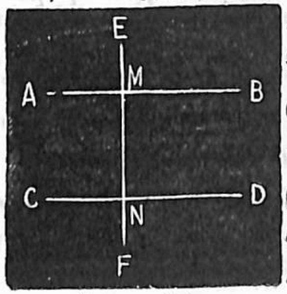
§ 34 Ակսիոմայ․ AB եւ CD գծերը (նկր. 55)․ որոնցից CD ուղղահայեաց է EF կտրող գծին, իսկ AB կազմում է նորա հետ սուր կամ բութ անկիւն, շարունակվելով հանդիպում են միմեանց․



Նկար 55.

Այս ճշմարտութիւնից հետևում է, որ ուղիղ գիծը ուղղահայեաց լինելով զուգահեռական գըծերից մինին, ուղղահայեաց կը լինի և միւսին։

Արդարև, թող AB և CD (Նկր. 54) երկու զուգահեռական գծեր լինեն և դիցուք թէ EF ուղիղ գիծը ուղղահայեաց է CD գծին, եթէ N կէտից թողնենք ուղղահայեաց դէպի AB գիծը, դա միևնոյն ժամանակ կը լինի ուղղահայեաց և CD գծին, ապա թէ ոչ CD և AB, համաձայն նախընթաց ակսիոմայի կը հատուին, բայց նորանից, որ այդ գիծը ուղղահայեաց է CD գծին, հետևում է, որ նա միաւորվում է EF գծի հետ, ու-

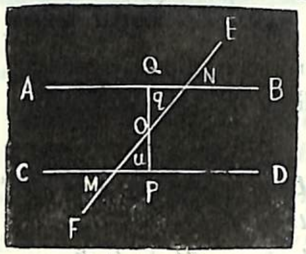


Նկար 54.

րեմն EF *գիծը հատում է* AB *գծին, կազմելով նորա հետ ուղիղ անկիւն այսինքն նորան ուղղահայեաց է։*

§ *35.* Տեորեմայ։ Զուգահեռական գծերը հատող գըծի հետ կազմում են հաւասար ներքին խաչադիր անկիւններ։

Դիցուք թէ AB *և* CD *գծերը (նկր. 56) զուգահեռական են և կտրվում են* EF *գծով հարկաւոր է ապացուցանել. որ* $q=u$։



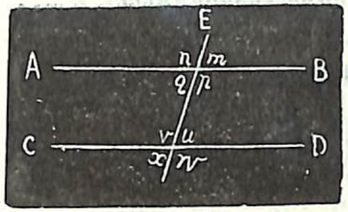
Նկար 56.

Ապաց. Թող MN *գծի մէջ տեղը լինի* O *կէտը, այդ կէտից թողնենք ուղղահայեաց* CD *գծի վերայ և շարունակենք նորան մինչև* AB *գծի հետ հատուելը։* PQ *գիծը,* § *34 համաձայն, ուղղահայեաց է* AB *գծին, ուրեմն,* MOP *և* QON *եռանկիւնիները ուղղանկիւնի են. բացի այդ* $MO=ON$ *և* $\angle QON=\angle MOP$ *իբրև հակադիր անկիւններ, ապա* § *24 համաձայն, այդ եռանկիւնիները հաւասար են. ուրեմն* $\angle q=\angle u$։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ տուած կէտի վերայով միայն մի զուգահեռական գիծ կարելի է անցկացնել տուած գծին։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է նոյնպէս, որ,

1. Եթէ AB *և* CD *գծերը զուգահեռական են, ապա արտաքին խաչադիր անկիւնները, օրինակի համար* m *և* x, *հաւասար են. որովհետև նորանից, որ* $q=u$, *հետևում է* $m=x$։



Նկար 53.

2. Եթէ AB *և* CD *գծերը զուգահեռական են, ապա համապատասխան անկիւնները, օրինակի համար* m *և* u *հաւասար են, որովհետև նորանից որ* $q=u$, *հետևում է* $m=u$։

3. Եթէ AB *և* CD *գծերը զուգահեռական են, ապա ներսի միակողմանի անկիւնների գումարը, օրինակի համար* p *և* u, *հաւասար է երկու ուղիղ անկեանը, որովհետև նորանից որ* $q=u$ *և* $q+p=2d$, *հետևում է* $u+p=2d$.

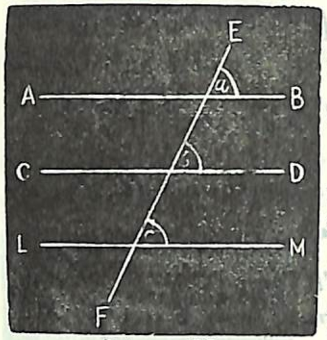
4. Եթէ AB *և* CD *գծերը զուգահեռական են, ապա արտաքին միակողմանի անկիւնների գումարը, օրինակի համար* m *և* w, *հաւասար է երկու ուղիղ անկեանը, որովհետև նորանից որ* $m=x$ *և* $x+w=2d$, *հետևում է* $m+w=2d$։

5. Առհասարակ եթէ AB *և* CD *գծերը զուգահեռական են, ապա գոյութիւն ունեն բոլոր 16 հաւասարութիւնները* § *33 հետևանք 5-դի։ Պարզ բան է, որ եթէ այդ հաւասարութիւններից մինը գոյութիւն չունի ապա և գոյութիւն չունին բոլոր միւսները, և այս դիպուածում գծերը զուգահեռական չեն, այսինքն շարունակվելով հանդիպում են իրար *)։*

**) Նկատողութիւն։ Այն առաջարկութիւնը՝ թէ երկու գիծ կտրուած են երրորդ թեք գծով և երկու ներքին միակողմանի անկեանց գումարը հաւասար չէ* 2d, *ապա գծերը շարունակուելով հանդիպում են՝ Էվկլիդոսը ընդունել է իբ-*

ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿԱՆ ԳԾԵՐԻ ՄԻ ՔԱՆԻ ՀԵՏԵՒԱՆՔՆԵՐ

§ *36*. Տէօրէմայ։ Երկու գիծ, զուգահեռական լինելով երրորդ գծին, զուգահեռական են միմեանց։



Նկար 57.

Դիցուք թէ AB ‖ LM *և* CD ‖ LM (*նկր. 57*). *հարկաւոր է ապացուցել, որ* AB ‖ CD։

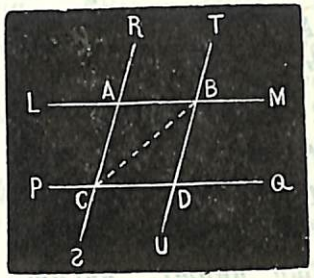
Ապաց. AB *և* LM *գծերը զուգահեռական լինելով,* a *անկիւնը հաւասար է* c *անկեանը, իսկ* CD *և* LM *գծերի զուգահեռականութիւնից հետևում է, որ* b *անկիւնը*=c *անկեանը, ուրեմն* ∠a=∠b, *և այդ պատճառաւ, համաձայն* § *33*, AB *և* CD *զուգահեռական են*։

րև մի ինքն ըստ ինքեան հասկանալի ճշմարտութիւն և նորա երկրաչափութեան մէջ կազմում է գիտութեան մէջը յայտնի տասնումէկերորդ ակսիոման։ Երկրաչափների մօտ հռչակուած է այս առաջարկութիւնը, որովհետև սորա ակներևութեան դէմ շատ հակաճառութիւններ են արած։ Բայց չնայելով հին և նոր ժամանակուայ երկրաչափների մեծ աշխատանքին ապացուցել այս առաջարկութիւնը ամենաճիշտ կերպով, այնու ամենայնիւ բաւականացուցիչ եզրակացութեան չեկան։ Gruber-ի էնցիկլոպեդիայի մէջ, գլուխ «զուգահեռական գծեր» զետեղուած է զանազան կարծիքները առարկայի մասին, դորա հետ միասին ցոյց է տուած զանազան հեղինակութիւններ զուգահեռական գծերի մասին, որոց թիւը հասնում է մինչև 100։ Զուգահեռական գծերի զանազան տեսութիւնը գտնում ենք նոյնպէս ակադեմիկ Վ. Ե. Բունիակովսկու հեղինակութեան մէջ. Զուգահեռական գծերի մասին։ (1853).

§ *37*. Տեօրեմայ։ Զուգահեռականաց գծերի կտորները, զուգահեռականների մէջ, հաւասար են միմեանց։

Դիցուք թէ LM ‖ PQ *և* RS ‖ TU (*նկր. 58*), *հարկաւոր է ապացուցել, որ* AB=CD *և* AC=BD։

Ապաց. *Միացնելով* B *և* C *կէտերը կը ստանանք* ABC *և* BDC *եռանկիւնիները, որք ունենալով մի ընդհանուր կողմ* CB, *բացի այդ* § 35 *համաձայն* ∠ABC=∠BCD *և* ∠CBD=∠ACB, *ինչպէս ներքին խաչադիր անկիւններ, ուրեմն* AB=CD *և* AC=BD։



Նկար 58.

Հակառ. Տեօրեմայ։ Երէ AB=CD եւ AC=BD, ապա LM ‖ PX եւ RS ‖ TU։

Ապաց. *Արդարև* ABC *և* CBD *եռանկիւնիքը ունեն մի ընդհանուր կողմ* CB *և բացի այդ տուած է* AB=CD *և* AC=BD, *ուրեմն այս եռանկիւնիները հա-*

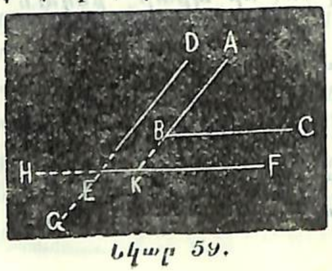
Այն բոլոր փորձերից, որով ցանկանում էին հիմնել զուգահեռական գծերի տեսութիւն, որ լինէր ճիշտ ապացուցված, մենք եզրակացնում ենք որ այս տեսութիւն պահանջում է մի առանձին սկզբունք, որ պէտք ընդունենք առանց ապացուցութեան, որպէս մի ինքն ըստ ինքեան հասկանալի ճշմարտութիւն։ Բոլոր դժուարութիւնը կը կայանայ միայն այդ ճշմարտութիւնը ընտրելում, որ պէտք ընդունվի առանց ապացուցութեան։ Այն առաջարկութիւնը, թէ երկու գծեր, որոնցից մինը ուղղահայեաց է, իսկ միւսը թեք է հատող գծին, շարունակուելով կը հանդիպեն միմեանց, որ ընդունված է § 34 իբրև ակսիոմայ զուգահեռական գծերի տեօրիայի մէջ, ակներև է, որ դա ոչ այլ ինչ է եթէ ոչ Էվկլիդոսի տասներեքերորդ ակսիոմայի ամենահասարակ արտայայտութիւնը։

ւասար են միմեանց, և այս պատճառաւ $\angle ABC=\angle BCD$ և $\angle CBD=\angle ACB$. բայց այս անկիւնները ներսի խաչադիր անկիւններ են, ուրեմն § 33 համաձայն $LM \parallel PQ$ և $RS \parallel TU$։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ եթէ AC և BD կտորները զուգահեռական են և հաւասար են միմեանց, ապա և միւս երկու AB և CD կտորներն էլ զուգահեռական և հաւասար են միմեանց։ Արդարև ABC եւ DBC եռանկիւնները, ունենալով մի ընդհանուր կողմ CB, բացի այդ տուած է $AC=BD$ և $\angle ACB=\angle CBD$ (§35), հաւասար են միմեանց, ուրեմն AB և CD կողմերը հաւասար են և այդ պատճառաւ նախընթաց տեորեմայի հիման վերայ, զուգահեռական են։

Ենթադրելով, որ LM և PQ գծերը ուղղահայեաց են RS և TU գծերին, կը գտնենք, նախընթաց առաջարկութեան համաձայն, որ զուգահեռական գծերը իւրեանց բոլոր կէտերով հաւասար հեռացած են միմեանցից և ընդհակառակը, այն գծերը, որք իւրեանց բոլոր կէտերով հաւասար են հեռացած միմեանցից, զուգահեռական են միմեանց։

§ *38.* Տ ե ո ր ե մ ա յ։ Զուգահեռական կողմեր ունեցող անկիւնները հաւասար են միմեանց, երբ իւրեանց բացուածքով մի կողմն են դարձրած։



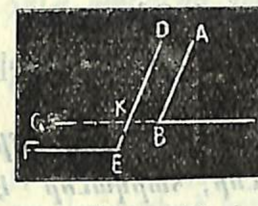
Նկար 59.

Դիցուք թէ $AB \parallel DE$ և $BC \parallel EF$ (*Նկր. 59*), *հարկաւոր է ապացուցանել, որ* DEF և ABC *անկիւնները, որք իւրեանց բերանով դիմած են դէպի մի կողմը, հաւասար են միմեանց։*

Ապաց. AB *կողմը շարունակելով մինչև* EF *գծի հետ հատուիլը* § *35 համաձայն, կը գտնենք, որ* $\angle ABC = \angle AKF$ և $\angle AKF=\angle DEF$, *որպէս համապատասխան անկիւններ, ուրեմն* $\angle ABC=\angle DEF$։

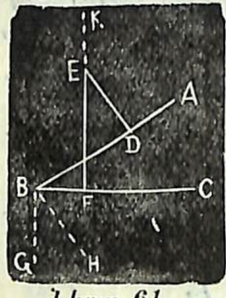
Շարունակելով DE և FE *կողմերը, կը գտնենք որ* $\angle ABC=\angle HEG$, *այսինքն* ABC և HEG *զուգահեռական կողմեր ունեցող անկիւնները, բայց իւրեանց բացուածքով դարձուած հակադիր կողմեր նոյնպէս հաւասար են։*

Իսկ եթէ զուգահեռական կողմեր ունեցող անկիւնները, դարձրած են իւրեանց բացուածքով զանազան, բայց ոչ հակադիր, կողմեր, ինչպէս ABC *եւ* DEF *անկիւնները, ապա նոցա գումարը հաւասար է* 2d։ *Արդարև շարունակելով* BC *կողմը, գտնում ենք* § 35 *համաձայն որ* $\angle ABC+\angle DKG=2D$ և $\angle DKG=\angle DEF$, *ուրեմն* $\angle ABC+\angle DEF = 2d$։



Նկար 60.

§ *39.* Տ ե ո ր ե մ ա յ։ Երբ մի անկեան կողմերն ուղղահայեաց են միւս անկեան կողմերին, ապա այդ անկիւնները կամ հաւասար են միմեանց կամ նոցա գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեան։



Նկար 61.

Դիցուք թէ DEF *անկեան կողմերը* (*Նկր. 61*) *ուղղահայեաց են* ABC *անկեան կողմերին, հարկաւոր է ապացուցանել, որ* $\angle DEF=\angle ABC$։

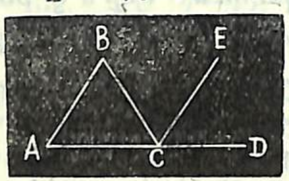
Ապաց. Անց կացնելով $BH \parallel ED$ և $BG \parallel EF$, *կը գտնենք նախընթաց* § *համաձայն, որ* $\angle HBG=\angle DEF$. *Իսկ*

∠HBD=∠EDA=d և ∠GBC=∠CFE=d. իսկ եթէ GBA անկիւնից հանենք GBC ուղիղ անկիւնը, ապա կը ստանանք ABC անկիւնը, իսկ եթէ միևնոյն անկիւնից հանենք HBD ուղիղ անկիւնը, ապա կը ստանանք GBH անկիւնը, ուրեմն ∠ABC=∠GBH և այս պատճառով ∠ABC=∠DEF։

Ակներև է, որ KED անկիւնը, որի կողմերը նոյնպէս ուղղահայեաց են ABC անկեան կողմերին, նորա հետ միասին կազմում է 2d։

Երբ, զուգահեռական կողմեր ունեցող անկիւնները, երկուսն էլ կամ սուր են կամ բութ, ապա հաւասար են միմեանց. իսկ եթէ մինը սուր է, միւսը բութ, ապա նոցա գումարը հաւասար է 2d։

§ *40.* Տեօրեմայ։ Իւրաքանչիւր եռանկիւնու ներսի անկիւնների գումարը հաւասար է 2d։



Նկար 62.

Թող ABC (նկր. *62*) լինի մի որևիցէ եռանկիւնի, հարկաւոր է ապացուցել, որ ∠ABC+∠BCD=∠CAB=2d.

Ապաց. AC կողմը շարունակելով և C կէտից անց կացնելով CE գիծը, զուգահեռական AB գծին կը գտնենք § *35* համաձայն, որ ∠ECD=∠BAC որպէս համապատասխան անկիւններ և ∠BCE=∠ABC, որպէս ներքին խաչադիր անկիւններ, ուրեմն.

BAC+ABC+BCA=ECD+BCE+ACB.

բայց որովհետև ECD+BCE+ACB=2d, ապա BAC+ABC+BCA=2d, ինչ որ հարկաւոր էր ապացուցել։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է։

1. Եռանկիւնու արտաքին անկիւնը հաւասար է ներքին անկիւնների գումարին բացի իւր կից անկիւնը։

2. Եռանկիւնու երկու անկեան գումարը հանելով 2d, կը ստանանք նորա երրորդ անկիւնը։

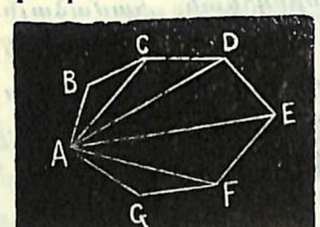
3. Եթէ մի եռանկիւնու երկու անկիւնը վերցրած առանձին առանձին կամ ի միասին, հաւասար է միւս եռանկիւնու երկու անկիւններին, ապա նոցա երրորդ անկիւնները ևս հաւասար են միմեանց։

4. Ուղղանկիւն-եռանկիւնու սուր անկիւնների գումարը հաւասար է d.

5. Հաւասարակողմ եռանկիւնու մէջ իւրաքանչիւր անկիւնը հաւասար է $^1/_3$ d.

6. Եռանկիւնու մէջ մի ուղիղ կամ մի բութ անկիւնից աւելի չի կարող լինել։

§ *41.* Տեօրեմայ։ Իւրաքանչիւր բազմանկիւնու ներքին անկիւնների գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց բազմապատկած նորա կողմերի թուի վերայ առանց երկուսի։



Նկար 24.

Դիցուք ABCDEEG բազմանկիւնին (նկր. *24*). ունի n կողմեր. հարկաւոր է ապացուցանել, որ նրա անկիւնների գումարը հաւասար է 2d (n—2)։

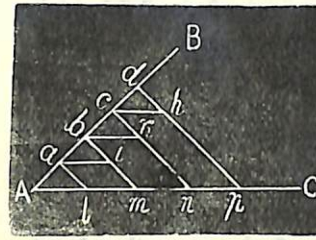
Ապաց. Որովհետև անկիւնագծերը, անց կացրած բազմանկիւնու մի որ և է A գագաթից, բաժանում են նորան n—2 եռանկիւնիների (§ *10*), բայց իւրաքանչիւր եռանկիւնու ներսի անկիւնների գումարը հա ւասար է 2d, համաձայն § *40*, ապա բազմանկիւնու անկիւնների գումարը հաւասար է 2d (n—2)։

Բանալով 2d (n—2) փակագծերը, կը ստանանք 2dn—4d. այսինքն իւրաքանչիւր բազմանկիւնու ներքին անկիւնների գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեան՝ բազմապատկած բազմանկիւնու կողմերի թուի վերայ և արտադրեալից հանած 4d։ Այսպէս օրինակի համար իւրաքանչիւր քառանկիւնու անկիւնների գումարը հաւասար է 4d, իւրաքանչիւր հինգանկիւնունը—6d և այլն։

Այս առաջարկութիւնից հետեւում է, որ իւրաքանչիւր բազմանկիւնու արտաքին անկիւնների գումարը, կազմուած բոլոր կողմերի շարունակութեամբը դէպի մի կողմը, հաւասար է չորս ուղիղ անկեանց։

Արդարև, իւրաքանչիւր արտաքին անկիւնը վերցրած իւր կից ներքին անկեան հետ հաւասար է 2d, ուրեմն բոլոր արտաքին և ներքին անկիւնների գումարը հաւասար է 2dn. բայց որովհետև համաձայն նախընթաց առաջարկութեան, ներքին անկիւնների գումարը առանձնապէս հաւասար է 2dn—4d, ապա արտաքին անկիւնների գումարը առանձնապէս հաւասար կը լինի 2dn—(2dn—4d), այսինքն 2dn—2dn+4d=4d։

§ *42*. Տեօրեմայ։ Եթէ անկեան մի կողմը բաժանենք մի քանի հաւասար մասերի եւ նոցա ծայրերից անց կացնենք զուգահեռական գծեր, ապա անկեան միւս կողմը եւս կը բաժանուի այնքան եւ միմեանց հաւասար մասերի։



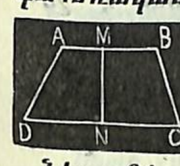
Նկար 63.

Դիցուք թէ BAC անկեան (նկր. *63*) AB կողմը բաժանենք Aa=ab=bc=cd հաւասար մասների և անց կացնենք al ‖ bm ‖ cn ‖ dp. հարկաւոր է ապացուցանել, որ Al=lm=mn=np։

Ապաց. Անց կացնենք ai, bk, ch գծերը զուգահեռական AC գծին, այն ժամանակ Aal, abi, bck, cdh եռանկիւնիների մէջ տուած են Aa=ab=bc=cd, և բացի այդ՝ այդ կողմերին կպած անկիւնները իբրև համապատասխան անկիւններ հաւասար են միմեանց, ուրեմն և այդ եռանկիւնիները, համաձայն § *16*, հաւասար են միմեանց, և այդ պատճառաւ Al=ai=bk=ch, իսկ սորանից հետեւում է, համաձայն § *37*, որ Al=lm=mn=np։

ԶՈՒԳԱՀԵՌԱԿՈՂՄԵՐ ԵՒ ՍԵՂԱՆԱՆՄԱՆՆԵՐ։

§ *43*. ABCD քառանկիւնին, որի երկու կողմերը AB և CD զուգահեռական են, իսկ միւս երկուսը՝ AD և BC ոչ, անուանվում է սեղանանման։ Երկու զուգահեռական կողմերի միմեանցից հեռաւորութիւնը,

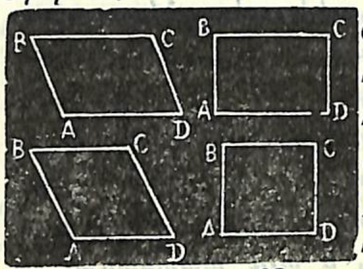


Նկար 64.

այսինքն MN ուղղահայեացը, թողնուած զուգահեռական կողմերի մինի մի որ և իցէ կետից դէպի միւս զուգահեռական կողմը, անուանվում է սեղանանմանի բարձրութիւն։

ABCD քառանկիւնին (նկր. 65), որի հակադիր կողմերը զուգահեռական են միմեանց, անուանվում է զուգահեռակողմ։ Նորա կողմերից մինը օրինակի համար AD, անուանվում է հիմք, իսկ ուղղահայեաց գիծը, թողած հիմքի հակադիր կողմի մի որ և իցէ կէտից դէպի հիմքը՝ անուանվում է բարձրութիւն։

Նկար 65. 66.



67 68.

ABCD զուգահեռագիծը (նկր. 66), որի բոլոր անկիւնները ուղիղ են, անուանվում է ուղղանկիւն։ Ուղղանկիւնու մի կողմը, օրինակի համար AD, նորա հիմքն է. իսկ միւսը՝ օրինակի համար AB, բարձրութիւնը։

Պարզ բան է, որ հաւասար բարձրութիւն և հիմք ունեցող ուղղանկիւնիքը հաւասար են միմեանց, որովհետև դնելով մինը միւսի վերայ, բոլորովին կը ծածկուին։

ABCD ուղղանկիւնին (նկր. 68), որի բոլոր կողմերը հաւասար են միմեանց և անկիւնները ուղիղ, անուանվում է քառակուսի։

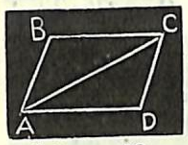
ABCD զուգահեռակողմը (նկր. 67), որի բոլոր կողմերը հաւասար են միմեանց, անուանվում է շեղական։

Իւրաքանչիւր զուգահեռակողմի մէջ մի կողմի վերայ գտնուած անկիւնների գումարը հաւասար է 2d, օրինակի համար A և D (նկր. 65). իսկ հակադիր

անկիւնները հաւասար են միմեանց, օրինակի համար A և C անկիւնները։

Զուգահեռակողմի հակադիր կողմերը հաւասար են միմեանց, համաձայն § 37, և ընդհակառակը եթէ քառանկիւնու հակադիր կողմերը հաւասար են, ապա նա զուգահեռակողմն է, համաձայն § 37։

§ 44. Իւրաքանչիւր զուգահեռակողմը անկիւնագծով բաժանվում է երկու հաւասար եռանկիւնիների։



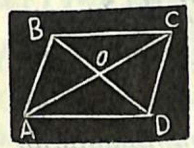
Նկար 69.

ABCD զուգահեռակողմի մէջ անց կացնենք AC անկիւնագիծը (նկր. 69) հարկաւոր է ապացուցել, որ ABC և ACD եռանկիւնիները հաւասար են միմեանց։

Ապաց. ABC և ACD եռանկիւնիները ունին մի ընդհանուր կողմ AC. բացի այդ, համաձայն § 43. AB=CD և BC=AD. ուրեմն այս եռանկիւնիները հաւասար են (§ 18)։

Պարզ բան է որ, ուղղանկիւնին, քառակուսին և շեղականը, որպէս մասնաւոր դիպուածներ զուգահեռակողմի, անկիւնագծերով բաժանվում են նոյնպէս երկու հաւասար եռանկիւնիների.

§ 45. Տեօրեմայ։ Զուգահեռակողմի անկիւնագծերը փոխադարձ բաժանվում են երկու հաւասար մասների։



Նկար 70.

ABCD զուգահեռակողմի մէջ (նկր. 70) անց կացնենք AC և BD անկիւնագծերը, հարկաւոր է ապացուցել, որ AO=OC և OB=OD։

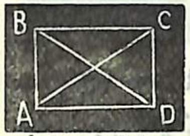
Ապաց. BOC և AOD եռանկիւնիների

մէջ, համաձայն § 43. BC=AD, իսկ կողմերի զուգահեռականութիւնից հետեւում է ∠OBC=ODA և ∠BCO=∠OAD. ուրեմն այս եռանկիւնիները հաւասար են, համաձայն § 16, և այդ պատճառաւ BO=OD և AO=OC։

BO=OD և AO=OC։

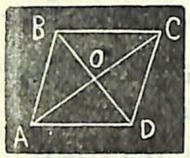
Պարզ բան է, որ ուղղանկիւնու, քառակուսու և շեղանկանի անկիւնագծերը նոյնպէս փոխադարձ բաժանվում են երկու հաւասար մասերի։ Բացի այս՝ ուղղանկիւնու, քառակուսու և շեղանկանի անկիւնագծերը ունեն առանձին յատկութիւններ։

ABCD ուղղանկիւնու (նկր. 71) AC և BD անկիւնագծերը հաւասար են միմեանց. այդ հետեւում է նորանից, որ ABC և BAD ուղղանկիւն եռանկիւնիքը, որոնց համար AB ընդհանուր էջ է և բացի այդ BC=AD, հաւասար են միմեանց։



Նկար 71.

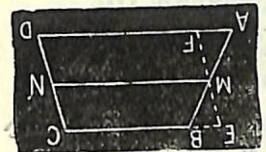
ABCD շեղականի AC և BD անկիւնագծերը (նկր. 72), փոխադարձ ուղղահայեաց են. այդ հետեւում է նորանից, որ ABO և CBO եռանկիւնիները, որք ունեն ընդհանուր BO կողմ, և բացի այդ տուած է AB=BC և AO=OC, հաւասար են միմեանց, ուրեմն ∠BOA=∠BOC, նոյն իսկ այս եռանկիւնիների հաւասարութիւնից հետեւում է, որ ∠ABO=∠OBC. այսինքն շեղականի անկիւնագծերը բաժանում են նորա անկիւնները հաւասար մասների։



Նկար 72.

Քառակուսու անկիւնագծերը հաւասար են, փոխադարձ ուղղահայեաց են եւ անկիւնները բաժանում են երկու հաւասար մասների։ Այդ հետեւում է նորանից, որ քառակուսին իւր մէջ պարունակում է ուղղանկիւնու և շեղականի բոլոր յատկութիւնները։

§ *46.* **Տեորեմա**։ Սեղանանմանի երկու անզուգահեռական կողմերի մէջտեղը միացնող ուղիղ գիծը *1)* զուգահեռական է միւս երկու կողմերին, *2)* հաւասար է նոցա գումարի կիսին։



Նկար 73.

Ենթադրենք թէ ABCD (նկր. 73) սեղանանմանի մէջ M և N կէտերը նորա անզուգահեռական կողմերի մէջտեղը են։ Հարկաւոր է ապացուցել 1) MN զուգահեռական է AD և BC կողմերին. 2) $MN=\frac{AD+BC}{2}$։

Ապաց. CB կողմը շարունակելով և անց կացնելով M կէտից EF գիծը զուգահեռական CD կողմին, կը կազմենք EMB և AME երկու եռանկիւնիքը, որք հաւասար են միմեանց (§ 16), որովհետև AM=MB և ∠AMF=∠BME (§ 7) և ∠FAM ∠EBM (§ 35)։ Այս եռանկիւնիների հաւասարութիւնից հետեւում է EM=MF, կամ $EM=\frac{EF}{2}$, բայց որովհետև տուած է $CN=\frac{CD}{2}$, իսկ համաձայն (§ 37), EF=CD, ապա EM=CN։ EM և CN կտորների հաւասարութիւնից և զուգահեռականութիւնից եզրակացնում ենք որ MN և EC կողմերը զուգահեռական են միմեանց (§ 37)։

2. Միևնոյն EMB և AMF եռանկիւնիների հաւա-
սարութիւնից հետևում է EB=AF։ Բայց որովհետև
համաձայն § 37. EC, MN և FD կողմերը հաւասար են
միմեանց, ապա

$$MN=BC+BE. \quad MN=AD-AF=AD-BE.$$

Գումարելով այս երկու հաւասարութիւնները, կը
ստանանք

$$2MN=AD+BC, \text{ ուրեմն } MN=\frac{AD+BC}{2}\text{։}$$

ԳԼՈՒԽ Դ.

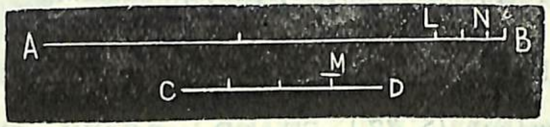
ՀԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԳԾԵՐ

Երկու գծերի ընդհանուր չափը։ Յարաբերական գծեր։

ԵՐԿՈՒ ԳԾԵՐԻ ԸՆԴՀԱՆՈՒՐ ՉԱՓԸ

§ **47.** *Երկու գծերի ընդհանուր չափը անուան-
վում է այնպիսի մի գիծ, որ պարունակվում է իւ-
րաքանչիւրի մէջ ամբողջ անգամ։*

Խնդիր։ Գտնել AB եւ CD գծերի ընդհանուր չափը
(Նկր. *74.*)։



Նկար 74.

Լուծումն։ Երկու գծերի ընդհանուր չափը գըտ-
նելու համար վարվում են այնպէս, ինչպէս Թուա-
բանութեան մէջ ընդհանուր ամենամեծ բաժանարար

գտնելիս։ CD փոքրիկ գիծը դնում ենք AB մեծ գը-
ծի վերայ, այնքան անգամ, որքան կը պարունակուի,
դիցուք թէ CD երկու անգամ կը պարունակուի AB
գծի մէջ և մնայ LB կտորը, այնպէս որ AB=2CD+
LB։ LB մնացորդը դնում ենք CD գծի վերայ, որքան
անգամ կարելի է, դիցուք թէ պարունակվում է 3 ան-
գամ և մնում է MD մնացորդը, այնպէս որ CD=3
LB+MD։

MD երկրորդ մնացորդը դնում ենք LB առաջին
մնացորդի վերայ, որքան անգամ կը պարունակուի,
դիցուք թէ պարունակվում է երկու անգամ և մնում
է NB մնացորդը, այնպէս որ LB=2MD+NB։

NB երրորդ մնացորդը դնում ենք MD մնացորդի
վերայ, որքան անգամ կը պարունակուի, և այսպէս
վարվելով շարունակում ենք դնել նոր մնացորդը նա-
խընթաց մնացորդի վերայ մինչև այն ժամանակ,
երբ կը հանդիպենք մի մնացորդի, որ կը պարունա-
կուի նախընթաց մնացորդում ամբողջ անգամ. այս
վերջին մնացորդը կը լինի երկու գծի ընդհանուր
չափը։ Ենթադրենք օրինակի համար, որ NB երրորդ
մնացորդը, երկրորդ մնացորդի մէջ պարունակվում է
ուղիղ երկու անգամ այնպէս որ

$$MD=2NB$$

այն ժամանակ NB կը լինի տուած գծերի ընդհանուր
չափը և արդարև մենք ունենք

$$LB=2MD+NB=5NB$$
$$CD=3LB+MD=17NB$$
$$AB=2CD+LB=39NB$$

բայց նորանից որ

$$AB=30NB \text{ և } CD=17NB$$

եզրակացնում ենք որ AB և CD գծերի ընդհանուր չափը է NB գիծը։

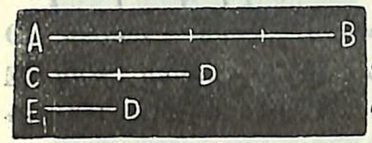
Նախընթաց հաւասարութիւններից երևում է, որ ընդհանուր չափը ամբողջ անգամ է պարունակվում իւրաքանչիւր մնացորդի մէջ։ Արդարև նա պարունակվում է ամբողջ անգամ AB և CD գծերի մէջ, ուրեմն պարունակվում է ամբողջ անգամ և LB գծի մէջ։ Յետոյ, նա պարունակվում է ամբողջ անգամ CD և LB գծերի մէջ. ուրեմն պարունակվում է ամբողջ անգամ և MD գծի մէջ և այլն։ Նորանից, որ ընդհանուր չափը պարունակվում է ամբողջ անգամ իւրաքանչիւր մինը միւսին հետևող մնացորդի մէջ, հետևում է, որ նա ոչ մի մնացորդից մեծ չի կարող լինել։

Երկու գծերի ընդհանուր չափը, այս ձևով որոնելու ժամանակ, կարող է պատահի, որ ոչ մինը, մին միւսին հետևող մնացորդներից, չպարունակուի նախընթաց մնացորդի մէջ ամբողջ անգամ, այդ դիպուածում երկու գծերը չունեն ընդհանուր չափ, այսինքն չկայ մի այնպիսի գիծ, որ ամբողջ անգամ պարունակուի երկու գծերից իւրաքանչիւրի մէջ։ Արդարև, եթէ ընդհանուր չափը գոյութիւն ունենար, ապա նա պիտի պարունակուէր, ինչպէս մենք նկատեցինք, ամբողջ անգամ իւրաքանչիւր մինը միւսին հետևող մնացորդների մէջ, բայց այդ մնացորդները աստիճանաբար և անսահման փոքրանում են և այդ պատճառաւ չի կարող լինել մի այնպիսի գիծ, որ

պարունակուի այդ բոլոր մնացորդների մէջ ամբողջ անգամ։

Երբ երկու գիծ ունեն ընդհանուր չափ, նոքա անուանվում են համաչափ, իսկ եթէ չունեն ընդհանուր չափ—անհամաչափ։

§ 48. Երկու գծի համեմատութիւնը անուանվում է այն թիւը, որ ցոյց է տալի, թէ քանի անգամ մինը երկար է կամ կարճ է միւսից։



Նկար 75.

AB և CD (Նկր. 75) երկու գծերի յարաբերութիւնը գրվում է կամ կոտորակի ձևով $\frac{AB}{CD}$, կամ քանորդի ձևով AB:CD.

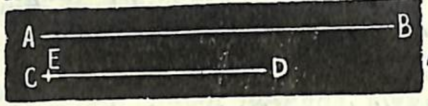
Խնդիր. Գտնել երկու գծերի համեմատութիւնը։

Լուծումն. Թող AB և CD լինեն (Նկր. 75) որ և իցէ երկու գծեր, նոցա յարաբերութիւնը գտնելու համար ակնածենք երկու դէպք։

1. Դէպք. Երբ AB և CD գծերը համաչափ են։ Թող ED լինի նոցա ընդհանուր չափը և դիցուք թէ նա պարունակվում է AB գծի մէջ 7 անգամ, իսկ CD գծի մէջ—4 անգամ. այնպէս որ $AB=7ED$ և $CD=4ED$։ Բաժանելով այս երկու հաւասարութիւնները, կը ստանանք $\frac{AB}{CD}=\frac{7ED}{4ED}$ կամ $\frac{AB}{CD}=\frac{7}{4}$ որ և կը լինի փնտրելի համեմատութիւնը, այսինքն AB գիծը $\frac{7}{4}$ անգամ շատ է CD գծից։

2. Դէպք. Երբ AB և CD գծերը (Նկր. 76) անհամաչափ են։ Այս դէպքում անկարելի է ճշտութեամբ

գտնել նոցա համեմատութիւնը, այլ կարելի է արտայայտել այդ մօտաւորապէս, ճշտութեան ցանկացած աստիճանով։



Նկար 76.

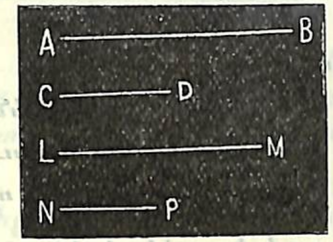
Դիցուք թէ հարկաւոր է գտնել AB և CD գծերի համեմատութիւնը մօտաւորապէս մինչև $\frac{1}{100}$ այսինքն արտայայտել նորան տասնորդական կոտորակի երկու տասնորդական նշանով։ Դորա համար CD փոքրիկ գիծը բաժանում ենք հարիւր մասը. թող CE լինի այդ մասներից մինը, այնպէս որ $CD=100CE$։ Դիցուք թէ CE մասը AB գծի մէջ պարունակվում է 134 անգամ և մնում է մի մնացորդ, այնպէս, որ $AB>134CE$ և $AB<135CE$, սորանից հետևում է, որ $\frac{134}{100}$ կամ 1,34 կոտորակը փոքր է $\frac{AB}{CD}$, իսկ $\frac{135}{100}$ կամ 1,35 կոտորակը մեծ է $\frac{AB}{CD}$։ Իսկ դորանից եզրակացնում ենք, որ 1,34 կոտորակը հաւասար է $\frac{AB}{CD}$ համեմատութեանը ճշտութեամբ մինչև $\frac{1}{100}$.

Երբ գծերը համաչափ են, ապա նոցա համեմատութիւնը անուանվում է արմատական. իսկ երբ անհամաչափ են—անարմատ։

Մի որ և իցէ գծի համեմատութիւնը մի ուրիշ գծին, որ ընդունված է իբրև միաւոր, անուանվում է առաջին գծի երկարութիւն։

ՅԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԳԾԵՐ

§ 49. Եթէ չորս գծեր ունեն մի այնպիսի յատկութիւն, որ նոցանից երկուսի համեմատութիւնը հաւասար է մնացած երկու գծերի համեմատութեանը, ապա անուանվում են յարաբերական գծեր։



Նկար 77.

Դիցուք թէ AB, CD, LM և NP (նկր. 77) լինեն 4 յարաբերական գծեր, այնպէս որ

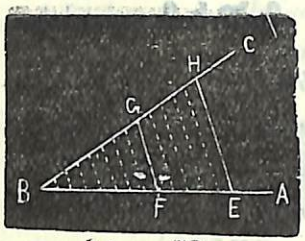
$$\frac{AB}{CD}=\frac{LM}{NP}$$

Եթէ այս հաւասարութեան մէջ AB, CD, LM և NP գծերի փոխարէն ենթադրենք նոցա երկարութիւնները արտայայտող թուերը, ապա այս հաւասարութիւնը կարելի է հետազօտել, որպէս երկրաչափական յարաբերութիւն և սորան վերաբերել բոլոր այն յատկութիւնները, որք ունեն երկրաչափական յարաբերութիւնները, ինչպէս օրինակի համար ներքին անդամների արտադրեալը հաւասար է արտաքին անդամների արտադրեալին, այս դէպքում կ՚արտայայտվի

$$AB.\ NP=CD.\ LM։$$

Այս հաւասարութիւնը ունի այն նշանակութիւնը, որ AB և NP գծերի երկարութիւնը արտայայտող թուերի արտադրեալը հաւասար է LM և CD գծերի երկարութիւնը արտայայտող թուերի արտադրեալին,

§ *50* Տեորեմայ։ Երկու զուգահեռական գծեր անցնելով մի անկեան կողմերի վերայով, կտրում են նոցա՝ միմեանց յարաբերական մասերի։



Նկար 78.

Դիցուք թէ FG և EH գծերը, որք կտրում են ABC անկեան կողմերը, (Նկր. 78) զուգահեռական են, հարկաւոր է ապացուցել, որ

$$\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BG}$$

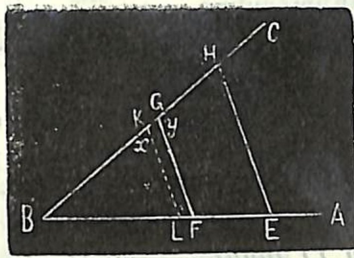
Ապաց. Ակնածենք երկու դէպք։

1. Դէպք. Երբ BE և BF կտորները համաչափ են։ Թող նոցա ընդհանուր չափը m անգամ պարունակուի BE գծի մէջ և n անգամ BF գծի մէջ, այնպէս որ $\frac{BE}{BF}=\frac{m}{n}$ ։ Եթէ BE գծի բոլոր բաժանող կէտերից անց կացնենք զուգահեռական գծեր HE գծին, ապա համաձայն § 42 BH և BG գծերը համապատասխանաբար կը բաժանուին m և n հաւասար մասների, այնպէս որ $\frac{BH}{BG}=\frac{m}{n}$ ուրեմն

$$\frac{BH}{BG}=\frac{BE}{BF}$$

2. Դէպք. Երբ BE և BF կտորները անհամաչափ են (Նկր. 79). այս դիպուածում $\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BG}$ յարաբերութեան ճշմարտութիւնը կարելի է արտայայտել, ապացուցանելով թէ $\frac{BE}{BF}$ համեմատութիւնը չի կարող ոչ մեծ լինել, ոչ փոքր $\frac{BH}{BG}$ համեմատութիւնից։

Արդարև, եթէ $\frac{BE}{BF}>\frac{BH}{BG}$, ապա այս կտորակները



Նկար 79.

հաւասարացնելու համար BG գծի փոխարէն վերցնենք նորանից փոքր BX գիծը, այնպէս որ

$$\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{Bx}$$

Եթէ BH կողմը բաժանենք այնպիսի հաւասար մասների, որ իւրաքանչիւր մասը xG գծից փոքր լինի, այն ժամանակ գոնէ մինը բաժանուող կէտերից կ՚ընկնի x և G կէտերի մէջ։ Թող K լինի այդ կէտը. անց կացնելով KL գիծը զուգահեռական HE գծին և նկատելով, որ BH և BK գծերը համաչափ են, կը ստանանք ինչպէս և առաջ

$$\frac{BE}{BL}=\frac{BH}{BK}$$

Եթէ այս յարաբերութեան երկու մասները բաժանենք, վերոյիշեալ

$$\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{Bx}$$

յարաբերութեան համապատասխան մասների վերայ և կրճատենք, ապա կը ստանանք

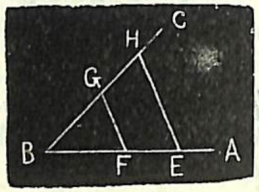
$$\frac{BF}{BL}=\frac{Bx}{BK}$$

Բայց $\frac{BF}{BL}$ և $\frac{Bx}{BK}$ համեմատութիւնները չեն կարող հաւասար լինել, որովհետև առաջինը մեծ է մէկից, իսկ երկրորդը փոքր է։ Սորանից հետևում է որ $\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{Bx}$ յարաբերութեան ենթադրելը տանում է մեզ սխալ եզրակացութեան և այս պատճառաւ $\frac{BE}{BF}$ համեմատութիւնը չի կարող մեծ լինել $\frac{BH}{BG}$ համեմատութիւնից։

Նոյն ձևով կարելի է ապացուցել, որ $\frac{BE}{BF}$ համեմատութիւնը չի կարող փոքր էլ լինել $\frac{BH}{BG}$, արժէ միայն BG փոխարէն վերցնել BY գիծը, որ աւելի մեծ է և կրկնել նախընթաց դատողութիւնները։

Այսպէս ուրեմն լինեն գծերը համաչափ թէ անհամաչափ, մենք միշտ կ՚ունենանք $\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BG}$։

Նախընթաց տեորեմայից հետևում է, որ EH և FG զուգահեռական գծերը (Նկր. 80) ABC անկեան կողմերը բաժանում են հետևեալ համեմատական մասների $\frac{FE}{BF}=\frac{GH}{BG}$, որովհետև $\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BG}$ յարաբերութիւնից հետևում է

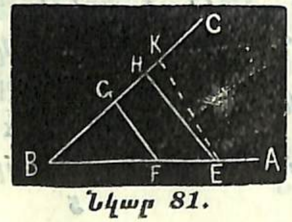


Նկար 80.

$$\frac{BE-BF}{BF}=\frac{BH-BG}{BG} \text{ կամ } \frac{FE}{BF}=\frac{GH}{BG}$$

Հակառակ Տեորեմայ։ Եթէ EH եւ FG (Նկր. 81) երկու գծերը բաժանում են ABC անկեան կողմերը $\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BG}$ յարաբերական մասների, ապա այդ գծերը զուգահեռական են։

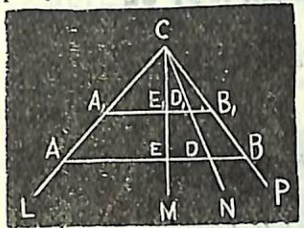
Ապաց. Եթէ EH գիծը զուգահեռական չէ FG գծին, ապա թող EK լինի նորան զուգահեռական, այն ժամանակ նախընթաց տեորեմայի հիման վերայ կ՚ունենայինք



Նկար 81.

$\frac{BE}{BF}=\frac{BK}{BG}$, որ հակաճառում է $\frac{BE}{BF}=\frac{BH}{BG}$ առաջարկութեանը։

§ 51. Տեորեմայ։ Մի կէտից դուրս եկած մի քանի ուղիղ գծեր բաժանվում են զուգահեռական գծերով հարաբերական մասների։



Նկար 82.

Դիցուք թէ AB և A_1B_1 (Նկր. 82) գծերը զուգահեռական են. հարկաւոր է ապացուցել, որ

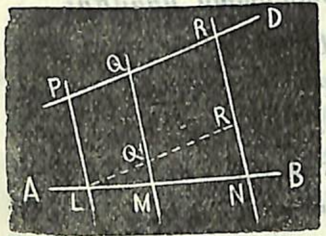
$$\frac{CA_1}{AA_1}=\frac{CE_1}{EE_1}=\frac{CD_1}{DD_1}=\frac{CB_1}{BB_1}$$

Ապաց. Նախընթաց § հիման վերայ ունենք

$\frac{CA_1}{AA_1}=\frac{CE_1}{EE_1}$, $\frac{CE_1}{EE_1}=\frac{C_1D_1}{DD_1}$, $\frac{CD_1}{DD_1}=\frac{CB_1}{BB_1}$. սորանից կը ստանանք

$$\frac{CA_1}{AA_1}=\frac{CE_1}{EE_1}=\frac{CD_1}{DD_1}=\frac{CB_1}{BB_1}\,։$$

§ 52. Տեորեմայ։ Երեք զուգահեռական գծերի մէջ գտնուած երկու ուղիղ գծերի մասները յարաբերական են։



Նկար 83.

Դիցուք թէ AB և PD գծերը կտրվում են LP, QM և RN երեք զուգահեռական գծերով (Նկր. 83), հարկաւոր է ապացուցել, որ

$$\frac{LM}{NM}=\frac{PQ}{QR}$$

Ապաց. L կէտից անց կացնելով LR_1 գիծը զուգահեռական PD գծին, կը գտնենք (§ 50) $\frac{LM}{MN}=\frac{LQ_1}{Q_1R_1}$. բայց, համաձայն § 37, $LQ_1=QP$ և $Q_1R_1=QR$ ուրեմն $\frac{LM}{MN}=\frac{PQ}{QR}$։

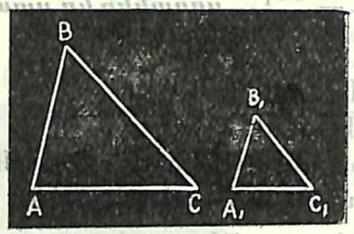
ԳԼՈՒԽ Ե.

ՈՒՂՂԱԳԻԾ ՁԵՒԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹԻՒՆԸ։

Եռանկիւնիների նմանութիւնը։ Բազմանկիւնիների նմանութիւնը։

ԵՌԱՆԿԻՒՆԻՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹԻՒՆԸ

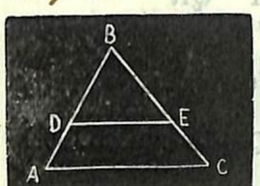
§ *53.* ABC *և* $A_1B_1C_1$ *եռանկիւնիները (նկր. 84), որոնց անկիւնները համապատասխանաբար հաւասար են միմեանց, անուանվում են նման եռանկիւնիներ, հաւասար անկեանց դիմացը գըտնուած կողմերը—համապատասխան կողմեր։*



Նկար 84.

Երբեմն նման բառի տեղ գործ են ածում ∽ *նըշանը։ Օրինակի համար.* $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ *կը նշանակէ՝* ABC *եռանկիւնին նման է* $A_1B_1C_1$ *եռանկեանը։*

Եռանկիւնիների նմանութիւնը որոշելուց հետեւում է.

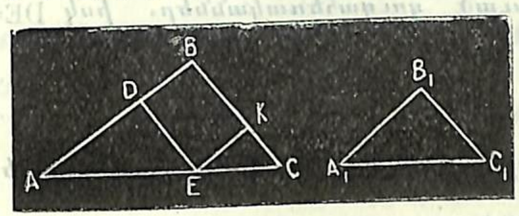


Նկար 85

1. Եթէ մի եռանկիւնու երկու անկիւնները հաւասար են միւս եռանկիւնու երկու անկիւններին, ապա եռանկիւնիները նման են (§ *40 հետ. 3)։*

2. Եթէ ABC *եռանկիւնու մէջ (նկր. 85) անցկացնենք* DE *գիծը զուգահեռական* AC *կողմին, ապա կը կտրվի* DBE *եռանկիւնին, որ նման կը լինի* ABC *եռանկիւնուն, որովհետև* (§ *35)* $\angle BDE = \angle BAC$ *և* $\angle BED = \angle BCA$ *որպէս համապատասխան անկիւններ.*

§ *54* Տեորեմայ։ Նման եռանկիւնիների համապատասխան կողմերը յարաբերական են։



Նկար 86.

Դիցուք թէ ABC *և* $A_1B_1C_1$ *(Նկար 86) եռանկիւնիների մէջ* $A = A_1$, $B = B_1$ *և* $C = C_1$. *հարկաւոր է ապացուցել, որ*

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$$

Ապաց. AB *և* AC *կողմերի վերայ վերցնենք* AD *և* AE *մասները հաւասար* A_1B_1 *և* A_1C_1 *կողմերին, միացնենք* D *կետը* E *կետի հետ։* ABC *և* ADE *եռանկիւնիները, ունենալով երկու կողմերը և նոցա միջի գտնուած անկիւնը հաւասար միմեանց, հաւասար են, ուրեմն* $\angle B_1 = \angle ADE$. *և որովհետև* $\angle B = \angle B_1$, *ապա* $\angle B = \angle ADE$ *և այդ պատճառաւ* DE *և* BC *գըծերը զուգահեռական են և մենք կ՚ունենանք*

$$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{AE} \text{ կամ } \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{AC}{A_1C_1}\text{։}$$

Ապացուցանելով A *և* A_1 *հաւասար անկիւններ* կազմող կողմերի յարաբերութիւնը, նոյն ձևով կարելի է ապացուցել B և B_1 հաւասար անկիւններ ներփակող կողմերի յարաբերութիւնը։ Կամ աւելի կարճ։ Անց կացնենք E կէտից EK գիծը զուգահեռական AB գծին. § 50 հիման վերայ կ'ունենանք

$\frac{BC}{BK}=\frac{AC}{AE}$, բայց $BK=DE$, որպէս զուգահեռականների մէջ հատուած զուգահեռականներ. իսկ $DE=B_1C_1$ և $AE=A_1C_1$ ուրեմն

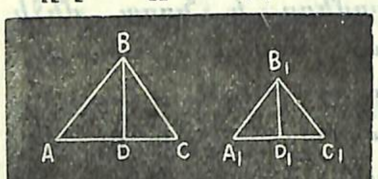
$$\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$$

այս յարաբերութիւնը միացնելով առաջինի հետ, կ'ունենանք

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$$

ինչ որ հարկաւոր էր ապացուցել։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է որ ABC և $A_1B_1C_1$ (նկր. 87) նման եռանկիւնիների մէջ BD և B_1D_1 բարձրութիւնները յարաբերական են կողմերին, որովհետև ABD և $A_1B_1D_1$ եռանկիւնները, որոնց մէջ տուած է $\angle A=\angle A_1$, իսկ $\angle ABD=\angle A_1B_1D_1$ որպէս ուղիղ անկիւններ, ուրեմն

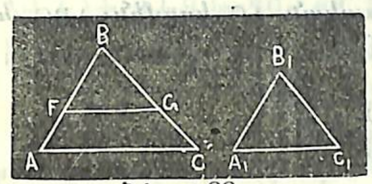


$$\frac{BD}{B_1D_1}=\frac{AB}{A_1B_1}.$$

Նկար 87.

§ *55.* Տեորեմայ։ Եռանկիւնիները նման են, երբ նրանց կողմերը յարաբերական են։

Դիցուք թէ ABC և $A_1B_1C_1$ (նկր. 88) եռանկիւնիների մէջ

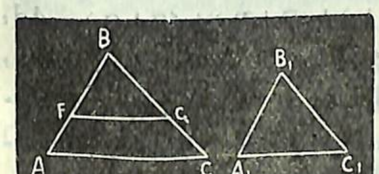


Նկար 88.

$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$. հարկաւոր է ապացուցել, որ $\angle A=\angle A_1$, $\angle B=\angle B$, և $\angle C=\angle C_1$։

Ապաց. Վերցնենք AB կողմի վերայ $FB=A_1B_1$ և անց կացնենք FG գիծը զուգահեռական AC կողմին։ ABC և FBG եռանկիւնիները նման են և այդ պատճառաւ, համաձայն նախընթաց §, $\frac{AB}{FB}=\frac{BC}{BG}=\frac{AC}{FG}$։ Այս յարաբերութիւնը համեմատելով տուած $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ յարաբերութեան հետ և նկատելով, որ $FB=A_1B_1$ եզրակացնում ենք, որ $BG=B_1C_1$ և $FG=A_1C_1$։ Ուրեմն FBG և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիները հաւասար են, որովհետև բոլոր կողմերը համապատասխանաբար հաւասար են միմեանց և այդ պատճառաւ $\angle A_1=\angle F=\angle A$, $\angle C_1=\angle G=\angle C$ և $\angle B_1=\angle B$։

§ *56.* Տեորեմայ։ Երկու եռանկիւնիներ նման են, եթէ ունեն մի մի հաւասար անկիւն, և այդ անկիւնը կազմող կողմերը յարաբերական են։



Նկար 89.

Դիցուք թէ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիներում (նկր. 89) $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ և $\angle B=\angle B_1$. հարկաւոր է ապացուցել, որ $\angle A=\angle A_1$ և $\angle C=C_1$։

Ապաց. AB *կողմի վերայ վերցնենք* $FB=A_1B_1$ *և անց կացնենք* FG *զուգահեռական* AC *կողմին։* ABC *և* FBG *եռանկիւնիները նման են և այդ պատճառաւ*

$$\frac{AB}{FB}=\frac{BC}{BG}$$

Համեմատելով այդ յարաբերութիւնը մեզ տուած $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}$ *յարաբերութեան հետ և նկատելով, որ* $FB=A_1B_1$, *եզրակացնում ենք, որ* $BG=B_1C_1$ *ուրեմն* FBG *և* $A_1B_1C_1$, *որոնց երկու կողմերը և նոցա մէջը գտնուած անկիւնները հաւասար են, հաւասար են միմեանց և այդ պատճառաւ* $\angle A_1=\angle F=\angle A$ *և* $\angle C_1=\angle G=\angle C$։

§ *57.* Տեորեմայ: Երկու եռանկիւնիներ նման են միմեանց, եթէ նոցա կողմերը փոխադարձ զուգահեռական են։

Ապաց. Որպէս զի ապացուցել այս առաջարկութիւնը անկախ եռանկիւնիների փոխադարձ դրութիւնից, թող A,B,C *լինեն մի եռանկիւնու անկիւնները, իսկ* A_1, B_1, C_1 *միւս եռանկիւնու համապատասխան անկիւնները, այնպէս որ միանուանի անկիւնների կողմերը, օրինակի համար* A *և* A_1 *փոխադարձ զուգահեռական են։* § *40 հիման վերայ* $A+B+C=2d$ *և* $A_1+B_1+C_1=2d$, *ուրեմն* $(A+A_1)+(B+B_1)+(C+C_1)=4d$։ *Եթէ* A *անկիւնը հաւասար չլինէր* A_1 *անկեանը, ապա, համաձայն* § *38,* $A+A_1=2d$, *բայց այդ դէպքում մնացած երկու* B *և* C *անկիւնները չեն կարող հաւասար լինել համապատասխանաբար* B_1 *և* C_1 *անկեանց. իսկ եթէ* B *հաւասար չէ* B_1 *ապա* (§ *38*) $B+B_1=2d$,

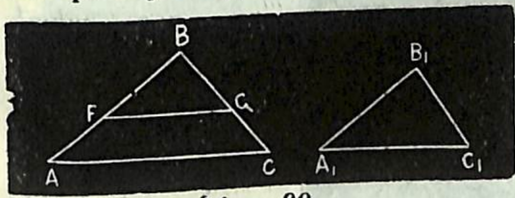
գումարելով $A+A_1=2d$ *և* $B+B_1=2d$, *կը ստանանք* $(A+A_1)+(B+B_1)=4d$, *որ հակառակ է* $(A+A_1)+(B+B_1)+(C+C_1)=4d$ *հաւասարութեանը։*

Սորանից հետևում է, որ $A=A_1$, $B=B_1$ *և* $C=C_1$։

§ *58.* Տեորեմայ։ Երկու եռանկիւնիներ նման են, եթէ նոցա կողմերը փոխադարձ ուղղահայեաց են միմեանց։

Ապաց. Որպէս զի ապացուցենք այս առաջարկութիւնը անկախ եռանկիւնիների փոխադարձ դրութիւնից, թող A, B, C, *լինեն մի եռանկիւնու անկիւնները, իսկ* A_1, B_1, C_1 *միւս եռանկիւնու, այնպէս որ միանուանի անկիւնների կողմերը, օրինակի համար* A *և* A_1, *փոխադարձ ուղղահայեաց են միմեանց։ Բայց որովհետև* $(A+A_1)+(B+B_1)+(C+C_1)=4d$ *և համապատասխան անկիւնները,* § *39 համաձայն, կամ հաւասար են միմեանց կամ հաւասար են* 2d, *ապա եզրակացնում ենք, ինչպէս և նախընթաց* § *մէջ, որ* $A=A_1$, $B=B_1$, *և* $C=C_1$։

§ *59.* Տեորեմայ։ *Ուղղանկիւն* եռանկիւնիները նման են, եթէ նոցա ներքնաձիգները և էջերից մինը յարաբերական են։



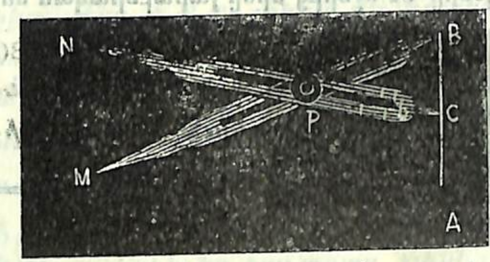
Նկար 90.

Դիցուք թէ ABC *և* $A_1B_1C_1$ *ուղղանկիւն եռանկիւնիների մէջ* $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ *(նկր. 90) հարկաւոր է ապացուցել որ* $A=A_1$ *և* $C=C_1$։

Ապաց. AB *կողմի վերայ վերցնենք* $FB=A_1B_1$ *և անց կացնենք* FG *զուգահեռական* AC *կողմին,* § *54* համաձայն կը գտնենք $\frac{AB}{FB}=\frac{AC}{FG}$։ Այս յարաբերութիւնը համեմատելով տուած $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ յարաբերութեան հետ և նկատելով, որ $FB=A_1B_1$, կը ստանանք $FG=A_1C_1$. ուրեմն FBG և $A_1B_1C_1$ ուղղանկիւն եռանկիւնները, ունենալով մի մի հաւասար ներքնաձիգ և մի մի—էջ, հաւասար են միմեանց, համաձայն § 25, և այդ պատճառաւ

$$\angle A_1=\angle F=\angle A \text{ և } \angle C_1=\angle G=\angle C։$$

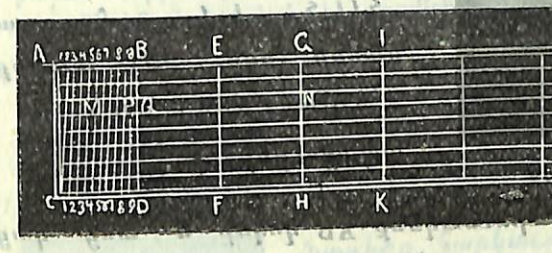
§ 60, Նման եռանկիւնների յատկութեանց վերայ հիմնուած է մի գործիք (նկր. 91) որ անուանվում է բաժանող կարկին (compas de reduction) և ծառայում է գծերի մի քանի հաւասար մասը բաժանելու ժամանակ։ Որպէս զի այս կարկինի օգնութեամբ AB գիծը բաժանենք, օրինակի համար երեք հաւասար մասը, P պտուտակը հեռացնում ենք ab ճեղքի երկարութեամբ M կէտից մինչև այնքան որ MP=3PB։ Այն տեղը, ուր պիտի կանգնացնենք P պտուտակը, նշանադրվում է թըւանշաններով, որք գրվում են ab ճեղքի երկարութեամբ։ Պտուտակը կարգաւորելով և ամրացնելով հարկաւոր եղած տեղը, բացում են կարկինը այնքան, որ M և N ծայ-



Նկար 91.

րերի հեռաւորութիւնը հաւասար լինի AB գծին, այն ժամանակ B և C ծայրերի միջի տարածութիւնը կը լինի նորա մի, երրորդական մասը։

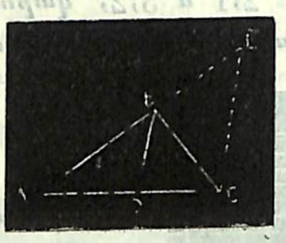
Մի և նոյն սկզբունքի վերայ հիմնած է լայն գծաչափի (նկր. 92) կառուցումն։ Դա բաղկացած է մի քանոնից, բաժանուած մի քանի հաւասար մասների AB, BE, EG...., որք ներկայացնում են գծաչափի ընդունուած միաւորը։ AC և AB գծերից իւրաքանչիւրը բաժանուած է 10 հաւասար մասների, AC գծի բաժանուած կէտերից անց ենք կացնում AB գըծին զուգահեռական գծեր. իսկ AB գծի բաժանուած կէտերից C2 գծին զուգահեռական գծեր։ Գծաչափի կառուցումից երևում է, որ երկու միմեանց հետևող զուգահեռական գծեր, որք անց են կացած քանոնի լայնութեամբ, օրինակի համար 2,1 և 3,2, կտրում են քանոնի երկարութեամբ քաշած զուգահեռական գծերից, մի մասը, որ հաւասար է ընդունած միաւորի տասներորդական մասին, այն ինչ այդ զուգահեռականների մասերը, որք գտնվում են CA և CD գծերի մէջ. հաւասար են $\frac{1}{10}, \frac{2}{10}, \frac{3}{10}$... 1,2 գծի կամ թէ $\frac{1}{100}, \frac{2}{100}, \frac{3}{100}$... ընդունած միաւորի։



Նկար 92.

Որպէս զի գծաչափի օգնութեամբ տուած գծի երկարութիւնը չափենք, դնում ենք այդ գիծը կարկինի օգնութեամբ գծաչափի զուգահեռական տողերից մինի վերայ, այնպէս որ կարկինի ծայրերը ընկնեն մօտաւորապէս բաժանման երկու կէտերի վերայ, օրինակի համար M և N կէտերի վերայ։ Ակներև է որ MN գիծը բաղկացած է 1) NQ գծից այսինքն երկու միաւորից. 2) MP գծից այսինքն միաւորի հինգ տասներորդականից և 3) PQ գծից այսինքն միաւորի չորս հարիւրերորդականից։ Ուրեմն MN=2,54։

§ *61.* Տեօրեմայ։ Եթե մի գիծ բաժանում է եռանկիւնու մի անկիւնը երկու կէսի, ապա նա բաժանում է հակադիր կողմը յարաբերական երկու միւս կողմերին։



Նկար 93.

Դիցուք թէ BD *գիծը բաժանում է* ABC *եռանկեան* B *անկիւնը երկու հաւասար մասնի (նկր. 93) այսինքն* $\angle ABD=\angle DBC$. *հարկաւոր է ապացուցել, որ* $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$։

Ապաց. Շարունակենք AB *կողմը և անց կացնենք* CE *գիծը, զուգահեռական* BD *գծին, § 35 համաձայն* $\angle BEC = \angle ABD$ *և* $\angle BCE=\angle DBC$ *և որովհետև* $\angle ABD=\angle DBC$, *ապա* $\angle BEC = \angle BCE$, *ուրեմն* BC=BE (§ *22*), *իսկ* EC *և* BD *գծերի զուգահեռականութիւնից հետևում է* $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BE}$ (§ *50*) *և որովհետև* BE=BC, *ուրեմն*

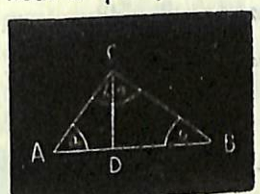
$$\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}.$$

Հակառակ տեօրեմայ. BD գիծը, բաժանելով AC կողմը AB եւ BC կողմերին յարաբերական մասների, բաժանում է B անկիւնը երկու հաւասար մասնի։

Դիցուք թէ $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$. *Հարկաւոր է ապացուցել որ* $\angle ABD=\angle DBC$։

Ապաց. BD *և* EC *գծերի զուգահեռականութիւնից հետևում է որ* $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{DE}$. *այս յարաբերութիւնը համեմատելով տուած յարաբերութեան հետ, եզրակացնում ենք, որ* BC=BE *այսինքն* CBE *եռանկիւնին հաւասարասրունք է և* $\angle BCE=\angle BEC$, *բայց § 35 համաձայն* $\angle ABD=\angle BEC$ *և* $\angle DBC=\angle BCE$, *ուրեմն* $\angle ABD=DBC$։

§ *62.* Տեօրեմայ։ Ուղիղ անկիւնից դէպի ներքնագիծը քաշած ուղղահայեացը միջին յարաբերականն է ներքնագծի կտորներին, իսկ էջերից իւրաքանչիւրը միջին յարաբերականն է ամբողջ ներքնագծին եւ ներքնագծի այն կտորին, որ իւր մօտ է գտնվում։



Նկար. 94.

Դիցուք ABC *ուղղանկիւն եռանկիւնու մէջ* CD *է ուղղահայեաց, ցած թողած* C *գագաթից դէպի* AB *ներքնագիծը. հարկաւոր է ապացուցանել, որ*

$$\frac{AD}{DC}=\frac{DC}{BD}, \frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}, \frac{AB}{CB}=\frac{CB}{DB}.$$

Ապաց. ABC *և* ACD *ուղղանկիւն եռանկիւնները, որք ունեն մի ընդհանուր* A *անկիւն § 40 համաձայն, նման են և այդ պատճառաւ* $\angle ABC=\angle ACD$։ *Նմանա-*

պէս և ABC և BCD ուղղանկիւն եռանկիւնները, ունենալով ընդհանուր B անկիւն, նման են և այդ պատճառաւ ∠BAC=∠BCD։ Սորանից հետևում է, որ ACD և DCB նման են միմեանց։

ACD և BCD եռանկիւնների նմանութիւնից հետևում է. (§ 54).

$$\frac{AD}{DC}=\frac{DC}{DB}$$

ABC և ACD եռանկիւնների նմանութիւնից հետևում է.

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{AD}$$

Վերջապէս ABC և DCB եռանկիւնների նմանութիւնից հետևում է.

$$\frac{AB}{CB}=\frac{CB}{DB}։$$

Վերցնելով արտաքին և ներքին անդամների արտադրեալը, կը գտնենք.

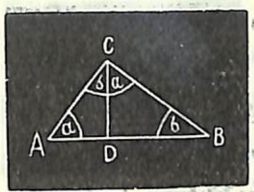
$DC^2=AD.DB$, $AC^2=AB.AD$ և $CB^2=AB.\ DB$

Եթէ բաժանենք երկրորդ հաւասարութիւնը երրորդի վերայ, կը ստանանք

$$\frac{AC^2}{CB^2}=\frac{AD}{DB}։$$

այսինքն՝ էջերի երկրորդ աստիճանները յարաբերում են միմեանց ինչպէս ներքնագծի կտորները։

§ 63. Տեորեմայ։ Ներքնագծի երկրորդ աստիճանը հաւասար է էջերի երկրորդ աստիճանների գումարին,



Նկար. 95.

Ապաց. Նախընթաց § գտած

$AC^2=AB.\ AD$ և $CB^2=AB.DB$

երկու հաւասարութեանց անդամները գումարելով կը ստանանք

$$AC^2+CB^2=AB.\ AD+AB.\ DB=ADB\ (AD+DB).$$

բայց որովհետև $AD+DB=AB$ (Նկր. 95), ապա

$$AC^2+CB^2=AB^2։$$

Էջերի և ներքնագծի մէջը եղած այս յարաբերութեան օգնութեամբ կարելի է որոշել ներքնագիծը, երբ տուած են երկու էջերը $AB=\sqrt{AC^2+CB^2}$, և էջը եթէ տուած են ներքնագիծը և միւս էջը $AC=\sqrt{AB^2-CB^2}$, այսինքն ներքնագիծը հաւասար է էջերի երկրորդ աստիճանների գումարից վերցրած արմատ երկրորդ աստիճանին և էջը հաւասար է արմատ երկրորդ աստիճանի ներքնագծի և միւս էջի երկրորդ աստիճանների տարբերութեանը։

§ 64. Տեորեմայ։ Սուր-անկիւն եռանկիւնու մէջ, սուր անկեան դիմաց գտնուած կողմի երկրորդ աստիճանը հաւասար է միւս երկու կողմերի երկրորդ աստիճանների գումարին. առանց հիմքի եւ սուր անկեան ու բարձրութեան մէջ գտնուող կտորի կրկնապատկեալ արտադրեալին։

Նկար. 96.

Դիցուք թէ ABC եռանկիւնու մէջ A անկիւնը սուր է (Նկր. 96) AC—հիմքն է և BD—բարձրութիւնը. հարկաւոր է ապացուցել՝ որ

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC.AD։$$

Ապաց. BDC և ABD ուղղանկիւն եռանկիւններից կը ստանանք.

$$BC^2=BD^2+DC^2 \text{ և } BD^2=AB^2-AD^2$$

Բացի այս $DC=AC-AD$. *ուրեմն*

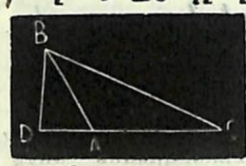
$$DC^2=(AC-AD)^2=AC^2-2AC.\ AD+AD^2։$$

Դնելով $BC^2=BD^2+DC^2$ *հաւասարութեան մէջ* BD^2 *և* DC^2 *փոխարէն գտած նշանակութիւնները և կրճատելով կը ստանանք.*

$$BC^2=AB^2+AC^2-2AC.AD։$$

§ *65*. Տեորեմայ՝ Բութ-անկիւն եռանկիւնու մէջ բութ անկեան դիմաց գտնուած կողմի երկրորդ աստիճանը հաւասար է միւս երկու կողմերի երկրորդ աստիճանների գումարին, գումարած հիմքի եւ բութ անկեան ու բարձրութեան մէջ գտնուած հիմքի կտորի կրկնապատկեալ արտադրեալի հետ։

Դիցուք թէ ABC *եռանկիւնու մէջ* A *անկիւնը բութ է* AC *գիծը—հիմքն է և* BD*—բարձրութիւնը.*



Նկար 97.

Հարկաւոր է ապացուցել, որ.

$$BC^2=AB^2+AC^2+2AC.AD։$$

Ապաց. BCD *և* BDA *ուղղանկիւն եռանկիւնիներից ունենք* (§ *63*).

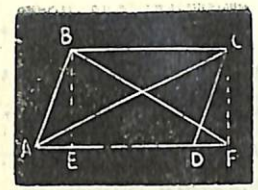
$$BC^2=BD^2+DC^2 \text{ և } BD^2=AB^2-AD^2։$$

Բացի այդ $DC=AC+AD$. *ուրեմն* $DC^2=(AC+AD)^2=AC^2+AD^2+2AC.AD$.

Դնելով $BC^2=BD^2+DC^2$ *հաւասարութեան մէջ* BD *և* DC^2 *փոխարէն նոցա որոնած նշանակութիւնը և կրճատելով կը ստանանք.*

$$BC^2=AB^2+AC^2+2AC.AD։$$

§ *66*. Տեորեմայ՝ Զուգահեռագծի անկիւնագծերի երկրորդ աստիճանների գումարը հաւասար է իւր կողմերի երկրորդ աստիճանների գումարին։



Նկար 98.

Դիցուք թէ ABCD (*նկր. 98*) *մի զուգահեռագիծ է է. հարկաւոր է ապացուցել, որ*

$$BD^2+AC^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2։$$

Ապաց. B *կէտից թողնենք. ուղղահայեաց* AD *կողմին և* C *կէտից—ուղղահայեաց այդ կողմի շարունակութեան վերայ,* § *64 հիման վերայ կը ստանանք.*

$$BD^2=AB^2+AD^2-2AD.\ AE$$

և § *65 հիման վերայ*

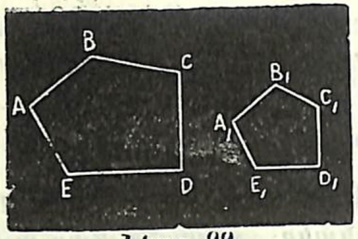
$$AC^2=CD^2+DA^2+2AD.DF։$$

Բայց որովհետև ABE *և* DCF *ուղղանկիւն եռանկիւնիները ունեն մի մի հաւասար ներքնագծեր* AB *և* CD *և հաւասար էջեր* BE *և* CF (§ *37*), *ուրեմն նոքա հաւասար են միմեանց. ապա* $AE=DF$։ *Այս պատճառաւ նախընթաց հաւասարութիւնները գումարելու ժամանակ* $2DA.AE$ *և* $2DA.DF$ *անդամները կը կրճատուեն, և եթէ* AD *կողմի փոխարէն վերցնենք նորան հաւասար* BC *կողմը, ապա կը ստանանք*

$$BD^2+AC^2=AB^2+BC^2+CD^2+DA^2։$$

ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆԻՆԵՐԻ ՆՄԱՆՈՒԹԻՒՆԸ

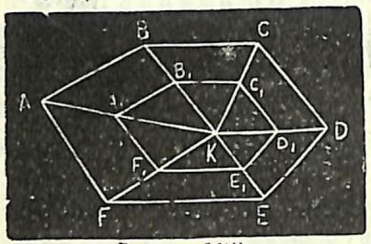
§ *67*. ABCDE *և* $A_1B_1C_1D_1E_1$ (*նկր. 99*) *բազմանկիւնիները անուանվում են նման բազմանկիւնիներ, եթէ նոցա բոլոր անկիւնները համապատասխանաբար*



Նկար 99.

հաւասար են միմեանց և նրանց կողմերը յարաբերական։ Յարաբերական կողմերը անուանվում են համապատասխան կողմեր։

Եթէ ABCDEF *բազմանկիւնու մէջի մի որ և իցէ կէտից (նկր. 100) անց կացնենք գծեր դէպի նորա բոլոր գագաթները, և այդ գծերը բաժանենք* $A_1, B_1, C_1, \ldots$ *կէտերում յարաբերական մասների, այնպէս որ*



Նկար 100.

$$\frac{AA_1}{A_1K}=\frac{BB_1}{B_1K}=\frac{CC_1}{C_1K}\ldots$$

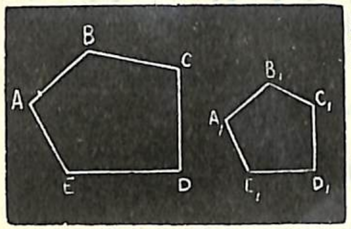
ապա միացնելով $A_1, B_1, C_1, \ldots$ *կէտերը, կը ստանանք* $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ *բազմանկիւնին նման* ABCDEF *բազմանկիւնուն։ Արդարև, համապատասխան անկիւնները որպէս զուգահեռական կողմերով անկիւններ հաւասար են միմեանց (§ 38)։ Բացի այդ* AKB *և* A_1KB_1, BKC *և* B_1KC_1, CKD *և* $C_1KD_1, \ldots$ *եռանկիւնիների նմանութիւնից հետևում է.*

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BK}{B_1K}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CK}{C_1K}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{DK}{D_1K}$$

և սորանից հետևում է

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D}\ldots$$

§ *68*. Տէո՛րեմայ։ Նման բազմանկիւնիների շրջագծերը յարաբերական են համապատասխան կողմերին։



Նկար 101.

Դիցուք թէ ABCDE *և* $A_1B_1C_1D_1E_1$ *բազմանկիւնիները (նկր. 101) նման են. հարկաւոր է ապացուցել, որ*

$$\frac{AB+BC+CD+ED+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+E_1D_1+E_1A_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\text{։}$$

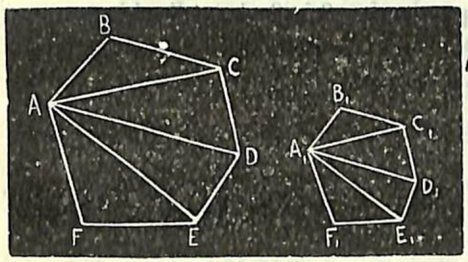
Ապաց. Բազմանկիւնիների նմանութիւնից հետևում է։

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D}=\frac{DE}{D_1E_1}=\frac{EA}{E_1A_1}.$$

իսկ սորանից

$$\frac{AB+BC+CD+DE+EA}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+D_1E_1+A_1E_1}=\frac{AB}{A_1B_1}\text{։}$$

§ *69*. Տեորեմայ։ Երկու նման բազմանկիւնիների համապատասխան անկիւններից անց կացրած անկիւնագծերը բաժանում են բազմանկիւնիներին հաւասար քանակութեամբ, մի ձեւով դասաւորուած նման եռանկիւնիների։



Նկար 100.

Դիցուք թէ ABCDEF *և* $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ *բազմանկիւնիները նման են, յայնքն* A, B, C, D, E *և* F *անկիւնները համապատասխանաբար հաւասար են* A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 *և* F_1 *անկիւններին և* AB, BC, CD, DE, EF *և* FA *կողմերը համապատասխանաբար յարաբերական են*

$A_1B_1, B_1C_1, C_1D_1, D_1E_1, E_1F_1$ և F_1A_1, կողմերին. հարկաւոր է ապացուցանել որ $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$, $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$ և այլն։

Ապաց. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիների մէջ $\angle B = \angle B_1$ և $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$. ուրեմն այդ եռանկիւնիները նման են (§ 58)

Իսկ դոցա նմանութիւնից հետեւում է $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$ և որովհետև տուած է $\angle C = \angle C_1$, ապա $\angle ACD = \angle A_1C_1D_1$. բացի այս $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{BC}{B_1C_1}$ և որովհետև տուած է $\frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, ապա $\frac{AC}{A_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1}$, ուրեմն ACD և $A_1C_1D_1$ եռանկիւնիները նման են (§ 58)։

Այս ձևով ապացուցվում է և հետեւեալ միւս եռանկիւնիների նմանութիւնը։

Այս § ասածներից հետեւում է, որ նման բազմանկիւնիների անկիւնագծերը յարաբերական են համապատասխան կողմերին,

Հակառակ տեորեմայ։ Եթէ երկու բազմանկիւնիներ $ABCDEF$ եւ $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (նկր. *100*) անկիւնագծերով բաժանվում են հաւասար քանակութեամբ նման եւ միակերպ դասաւորված եռանկիւնիների, ապա նոքա նման են։

Դիցուք թէ $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$. $\triangle ACD \backsim \triangle A_1C_1D_1$ և այլն. հարկաւոր է ապացուցել, որ $\angle A = \angle A_1$. $\angle B = \angle B_1$ և այլն և $\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{CD}{C_1D_1} \ldots$

Ապաց. ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիների նմանութիւնից հետեւում է, որ $\angle B = \angle B_1$ և $\angle BCA = \angle B_1C_1A_1$. Իսկ ACD և $A_1C_1D_1$ եռանկիւնիների նմանու-

թիւնից հետեւում է, որ $\angle ACD$ և $\angle A_1C_1D_1$ և այդ պատճառաւ $\angle BCD = \angle B_1C_1D_1$։ Նոյնպէս ապացուցվում է և միւս անկիւնների հաւասարութիւնը։

Ցետոյ ABC և $A_1B_1C_1$ եռանկիւնիների նմանութիւնից գտնում ենք

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{BC}{B_1C_1} = \frac{AC}{A_1C_1}.$$

իսկ ACD և $A_1C_1D_1$ եռանկիւնիների նմանութիւնից կըստանանք

$$\frac{CD}{C_1D_1} = \frac{AC}{B_1C_1} \text{ ուրեմն}$$

$$\frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CB}{C_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}\text{։}$$

Նոյն ձևով ապացուցվում է և միւս կողմերի յարաբերութիւնը։

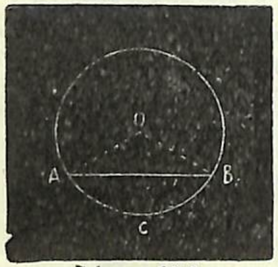
Գ Լ Ո Ւ Խ VI

ՇՐՋԱՊԱՏՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

Լարեր եւ շօշափող գծեր։ Անկիւնների չափումը։ Ցաւրաբերական գծեր շրջանի մէջ։ Շրջանների ներսը եւ դուրսը գծած բազմանկիւններ։ Երկու շրջապատների փոխադարձ դրութիւնը։

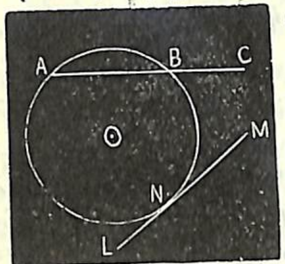
ԼԱՐԵՐ ԵՒ ՇՕՇԱՓՈՂ ԳԾԵՐ։

§ 70. *Շրջագծի մի որ և իցէ մասը անուանվում է աղեղն. օրինակի համար* ACB (*նկր.* 101), *աղեղի ծայրերը միացնող* AB *գիծը, եթէ չի անցնում կենդրոնի վերայով, անուանվում է լար։ Իւրաքանչիւր լար համապատասխանում է երկու անհաւասար աղեղներին, որք ի միասին կազմում են շրջապատը. օրինակ* AB *լարը համապատասխանում է* ACB *և* ADB *աղեղներին։ Ակներև է, որ իւրաքանչիւր լար տրամագծից փոքր է, որովհետև միացնելով լարի* A *և* B *ծայրերը կենդրոնի հետ, կը տեսնենք որ* AB<AO+OB *հաւասար է տրամագծին։* ABC *գիծը (նկր.* 102), *որ կտրում է շրջապատը, անուանվում է հատող գիծ։ Հատող գիծը երկու*



Նկար 101.

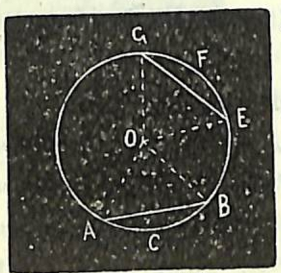
կէտից աւելի չի կարող կտրել շրջապատը որովհետև, եթէ մի երրորդ կէտում նոյնպէս կտրելիս լինէր, այն ժամանակ կը ստանայինք, որ մի գծի 3 կէտերը գտնվում են O *կէտից մի և նոյն հեռաւորութեան վերայ, որ հակառակ է։*



Նկար 102.

§ 30. LM *գիծը.* (*նկր.* 102) *ունենալով շրջապատի հետ միայն մի ընդհանուր* N *կէտ, անուանվում է շօշափող գիծ.* N *ընդհանուր կէտը՝ շօշափման կէտ, շօշափող կարելի է համարվել մի այնպիսի հատող գիծ, որի կտրվող կէտերը միաւորվել են։*

Շրջապատի AOBC *մասն (նկր.* 101) *սահմանափակած աղեղով և երկու շառաւիղով, անուանվում է հատած, իսկ* ABC *մասն սահմանափակած լարով և աղեղով—հատուած։*



Նկար 103.

§ 71. Տեորեմայ։ Հաւասար աղեղներով ձգուած լարերը հաւասար են։

Ապաց. Դիցուք թէ ⌣ ABC= ⌣ GEF (*նկր.* 103). *հարկաւոր է ապացուցանել, որ* AB *լարը հաւասար է* GE *լարին։*

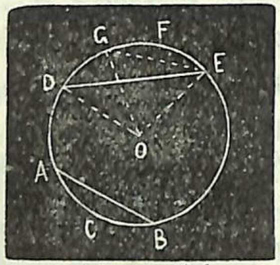
Ապաց. A, B, G *և* E *կէտերը միացնենք կենդրոնի հետ և* GOE *հատածը դնենք* AOB *հատածի վերայ, այնպէս որ* OG *շառաւիղը ընկնի* AO *շառաւիղի վերայ և* G *կէտը* A *կէտի վերայ, այն ժամանակ* GE *աղեղն կ՚ընկնի* AB *աղեղի վերայ, որովհետև դոցա* բոլոր կէտերը գտնվում են կենդրոնից հաւասար հեռաւորութեան վերայ, իսկ աղեղների հաւասարութիւնից հետեւում է, որ E կէտը կ'ընկնի B կէտի վերայ և GE լարը՝ AB լարի վերայ։

Հակառակ տեորեմայ։ Հաւասար լարերին ձգող աղեղները հաւասար են։

Դիցուք թէ AB *լարը հաւասար է* GE *լարին (նկր.* **103**)*. հարկաւոր է ապացուցանել որ* $\smile ACB = \smile GFE$։

Ապաց. GEF *հատածը դնենք* ABC *հատածի վերայ, այնպէս որ* GE *լարը ընկնի իւր հաւասար* AB *լարի վերայ.* G *կէտը* A *կէտի վերայ, իսկ* E *կէտը* B *կէտի վերայ. ակներև է, որ այդպիսով* GFE *աղեղն կ'ընկնի* ACB *աղեղի վերայ, որովհետև ինչպէս* GFE, *նոյնպէս և* ACB *աղեղների բոլոր կէտերը հաւասար հեռաւորութիւն ունեն կենդրոնից։*

§ 72. Տեորեմայ։ Մեծ աղեղը ձգում է մեծ լար։



Նկար **104**.

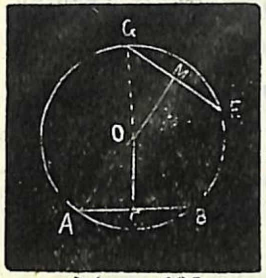
Դիցուք թէ $\smile DFE > \smile ACB$։ *հարկաւոր է ապացուցել որ* DE *լարը մեծ է* AB *լարից։*

Ապաց. EFD *աղեղի վերայ վերցնենք* EFG *մասն հաւասար* BCA *աղեղին, այն ժամանակ նախընթաց § համաձայն* GE=AB. *Իսկ եթէ* D, G *և* E *կէտերը միացնենք կենդրոնի հետ և նկատենք, որ* GOE *և* DOE *եռանկիւնիների* OE *կողմը ընդհանուր է և* DO=OG *որպէս շառաւիղներ, իսկ* GOE *և* DOE *անկիւնները անհաւասար են, ապա* § 17 *հիման վերայ կը ստանանք* DE>GE *կամ* DE>AB։

Հակառակ տեորեմայ։ Մեծ լարը ձգվում է մեծ աղեղով։

Ապաց. Երբ մի լարը մեծ է միւսից, ապա առաջինի աղեղն չէ կարող հաւասար լինել երկրորդի աղեղին, որովհետև այն ժամանակ լարերը ևս հաւասար կը լինէին (§ **71**), *որ հակառակ է առաջարկութեանը, իսկ առաջինի աղեղն չէ էլ կարող փոքր լինել երկրորդինից, որովհետև այն ժամանակ նախընթաց տեորեմայի հիման վերայ, առաջին լարը կը լինէր փոքր երկրորդից, որ նոյնպէս հակառակ է առաջարկութեանը, ուրեմն առաջին աղեղն մեծ է երկրորդից։*

§ **73.** Տեորեմայ։ Հաւասար լարերը հաւասարապէս են հեռացած կենդրոնից։



Նկար **105**.

Դիցուք թէ (նկր. **105**) AB=GE. OC $\perp$ AB *և* OM $\perp$ GE. *հարկաւոր է ապացուցել, որ* OC=OM։

Ապաց. A, B, E *և* G *միացնենք կենդրոնի հետ, կը նկատենք որ* AOB *և* GOE *եռանկիւնիները, որոնց մէջ* AB *տուած է հաւասար* GE, *իսկ միւս կողմերը հաւասար են միմեանց որպէս շառաւիղներ, հաւասար են միմեանց* (§ **18**), *ուրեմն այս եռանկիւնիների* OC *և* OM *բարձրութիւնները նոյնպէս հաւասար են* (§ 24 *կը ստանանք*)։

Հակառակ տեորեմայ։ Կենդրոնից հաւասար հեռաւորութիւն ունեցող լարերը հաւասար են միմեանց։

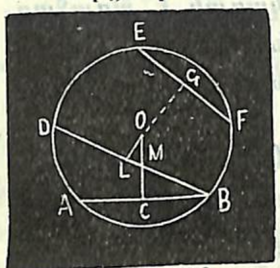
Դիցուք OC=OM. *հարկաւոր է ապացուցել* GE=AB։

Ապաց. AOC *և* GOM *ուղղանկիւն եռանկիւնիները, որոնք ունեն* AO *և* GO *հաւասար ներքնաձիգեր և, բացի այդ, տուած է* OC=OM, *հաւասար են միմեանց* (§ **25**), *ուրեմն* AC=GM, *նմանապէս* BOC *և* EOM *ուղ-*

ղանկյուն եռանկյունները ունենալով հավասար ներքնաձիգեր և մի մի հավասար էջեր, հավասար են միմեանց. այդ պատճառաւ $BC=EM$. սորանից հետևում է որ $AB=GE$։

§ 74. Տեորեմայ։ Մեծ լարը աւելի մօտ է կենդրոնին։

Դիցուք թէ EF լարը մեծ է DB լարից (նկր. 106). $OG \perp EF$ և $OL \perp DB$. հարկաւոր է ապացուցել, որ $OG>OL$։



Նկար. 106

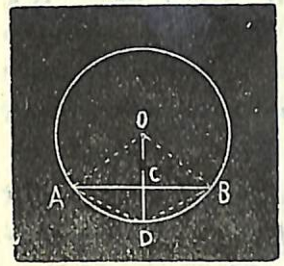
Ապաց. Վերցնենք EF լարին հաւասար AB լարը և O կենդրոնից թողնենք OC ուղղահայեացը։ § 73 համաձայն $OG=OC$, իսկ OM ինչպէս թեք գիծ երկար է OL ուղղահայեացից, ուրեմն $OC>OL$, ուրեմն և $OG>OL$։

Հակառակ տեորեմայ։ Երկու լարերից մեծը նա է, որ աւելի մօտ է կենդրոնին։

Ապաց. Եթե մի լարը աւելի մօտ է կենդրոնից քան միւսը, ապա նոքա չեն կարող հաւասար լինել միմեանց, որովհետև նոքա այն ժամանակ կենդրոնից հաւասար հեռացած պիտի լինէին, որ հակառակ է առաջարկութեանը, բայց և առաջին լարը չէ կարող փոքր լինել երկրորդից, որովհետև, այն ժամանակ նախընթաց § համաձայն առաջին լարը աւելի հեռացած կը լինէր կենդրոնից, քան թէ երկրորդը, որ նոյնպէս հակառակ է առաջարկութեանը։

§ 73. Տեորեմայ: Լարին ուղղահայեաց շառաւիղը

բաժանում է ինչպէս լարը, նոյնպէս և նորա աղեղը երկու հաւասար մասը։



Նկար. 107.

Դիցուք թէ (նկր. 107) OD շառաւիղը ուղղահայեաց է AB լարին, հարկաւոր է ապացուցել, որ $AC=CB$ և $\smile AD=\smile DB$։

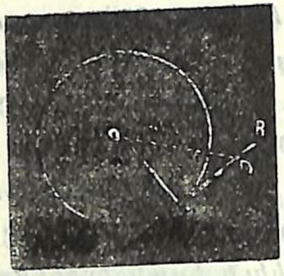
Ապաց. A և B կէտերը միացնենք O և D կէտերի հետ. AOC և BOC ուղղանկիւն եռանկիւնները, որք ունեն OC ընդհանուր էջ և հաւասար ներքնաձիգեր, հաւասար են միմեանց (§ 25), ուրեմն $AC=CB$։

Յետոյ ACD և BCD ուղղանկիւն եռանկիւնները, որոնք ունեն CD ընդհանուր էջ և ինչպէս ապացուցեցինք $AC=CB$, հաւասար են միմեանց (§ 23), ուրեմըն $AD=DB$ և այդ պատճառաւ § 80 համաձայն $\smile AD=\smile DB$։

Այս ասածներիցը հետևում է որ O, C և D կէտերը, այսինքն կենդրոնը, լարի միջի կէտը և աղեղի միջի կէտը գտնվում են մի ուղիղ գծի վերայ, որ ուղղահայեաց է լարին. ուրեմն այս կէտերից երկուսի վերայով անցնող ուղիղ գիծը կ'անցնի և երրորդ կէտի վերայով և ուղղահայեաց կը լինի լարին, իսկ լարին ուղղահայեաց գիծը անցնելով այդ կէտերից մինի վերայով, կ'անցնի և մնացեալ երկու կէտերի վերայով։

§ 76. Տեորեմայ։ Շօշափող գիծը ուղղահայեաց է այն շառաւիղին, որ անցնում է շօշափման կէտի վերայով։

Թող (նկր. 108) AB ուղիղ գիծը լինի շրջանին շօշափող C կէտում, հարկաւոր է ապացուցել, որ OC շառաւիղը ուղղահայեաց է AB գծին։



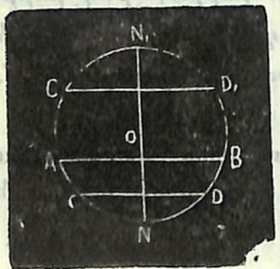
Նկար 108.

Ապաց. Որովհետև AB գծի իւրաքանչիւր D կէտը գտնվում է շրջանից դուրս, ապա OD>OC, ուրեմն OC ամենակարճ ճանապարհն է O կենդրոնից մինչև AB գիծը. իսկ ամենակարճ ճանապարհը մի կէտից մինչև մի գիծ է ուղղահայեաց գիծ (§ 28)։

Հակառակ տեորեմայ. AB գիծը ունենալով մի ընդհանուր C կէտ շրջապատի հետ և լինելով ուղղահայեաց OC շառաւիղին շօշափող է։

Ապաց. AB գծի մի որ և իցէ D կէտը միացնելով կենդրոնի հետ, կը գտնենք որ OD, ինչպէս թեք գիծ մեծ է OC ուղղահայացից, այսինքն շառաւիղից և այդ պատճառաւ AB գծի բոլոր կէտերը, բացի C կէտը, գտնվում են շրջանից դուրս, և իսկ այդ կը նշանակէ որ AB գիծը շօշափող է։

77. § Տեորեմայ. Զուգահեռական լարերի մէջ գտնուած աղեղները հաւասար են միմեանց։



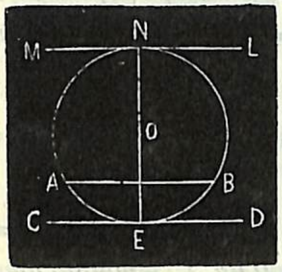
Նկար 109.

Ապաց. Նախ ենթադրենք (նկր. 109) AB և CD լարերը, որոնք գտնվում են կենդրոնի մի կողմը զուգահեռական են, հարկաւոր է ապացուցել, որ $\smile AC = \smile BD$, անց կացնենք ON շառաւիղը ուղղահայեաց AD լարին։ Լարերի զուգահեռականութիւնից հետևում է որ ON շառաւիղը ուղղահայեաց կը լինի և AB լարին, ուրեմն AN=NB և CN=ND (§ 75), հանելով առաջին հաւասարութիւնից երկրորդ հաւասարութիւնը, կը ստանանք AC=BD։

Երկրորդ. ենթադրենք թէ AB և C_1D_1 լարերը, գտնուած լինելով կենդրոնի զանազան կողմերը, զուգահեռական են, հարկաւոր է ապացուցել որ $AC_1=BD_1$։

Շարունակենք ON շառաւիղը մինչև $C D_1$ գծի հետ կտրուիլը, § 75 համաձայն կը ստանանք $C_1N_1=N_1D_1$. AN=NB, բայց որովհետև NCN_1 և NBN_1 կիսաշրջանները հաւասար են, ապա $AC_1=BD_1$։

§ 78. Տեորեմայ. Լարին զուգահեռական շօշափող գիծը, նորա համապատասխանող աղեղին երկու հաւասար մասն է բաժանում շօշափման կէտում։



Նկար 110.

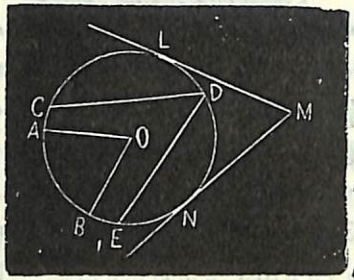
Դիցուք (նկր. 110) թէ CD շօշափողը AB լարին զուգահեռական է, հարկաւոր է ապացուցել, որ AE=EB։

Ապաց. O կենդրոնը միացնելով E շօշափման կէտի հետ, կը գտնենք, որ OE շառաւիղը ուղղահայեաց է CD շօշափող գծին, իսկ AB և CD գծերի զուգահեռականութիւնից հետևում է, որ OE շառաւիղը ուղղահայեաց է և AB լարին, ուրեմն AE=EB (§ 75)։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է, որ երկու զուգահեռական CD և ML շօշափող գծերի շօշափման կէտերը բաժանում են շրջապատը երկու հաւասար մասը։

ԱՆԿԻՒՆՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄՆ։

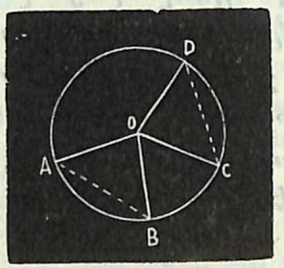
§ 79. AOB անկիւնը (նկր. 111), որի գագաթը գտնվում է շրջանի կենդրոնի վերայ, անուանվում է կենդրոնական անկիւն։ CDE անկիւնը. որի գագաթը գտնվում է շրջապատի վերայ, անուանվում է շրջապատի անկիւն կամ ներսը գծած անկիւն։ Իսկ LMN անկիւնը, որի կողմերը շօշափող են շրջապատին, անուանվում է դուրսը գծած անկիւն։



Նկար 111.

CLDNE աղեղը, որ տեղաւորում է իր մէջ CDE անկիւնը, անուանվում է CDE անկիւնը ընդունող աղեղ. իսկ CABE աղեղը, որ ձգում է CDE անկեան կողմերը, անուանվում է CDE անկեան աղեղ։

§ 89. Տեորեմայ։ Հաւասար կենդրոնական անկիւններն համապատասխանում են հաւասար աղեղներ։



Նկար 112.

Դիցուք թէ (նկր. 112) $\angle AOB = \angle COD$։ Հարկաւոր է ապացուցանել, որ $\smile AB = \smile CB$։

Ապաց. անց կացնելով AB և DC լարերը, կը նկատենք, որ AOB և COD եռանկիւնների մէջ AOB և COD անկիւնները հաւասար են, իսկ այդ անկիւնները կազմող կողմերը, որպէս շառաւիղներ նոյնպէս հաւասար են, ուրեմն այդ եռանկիւնները հաւասար են (§ 15) և

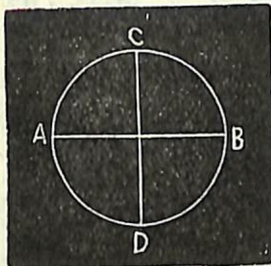
այդ պատճառաւ AD=CD. բայց հաւասար լարերին համապատասխանում են հաւասար աղեղներ, ուրեմն $\smile AB = \smile CD$։

Հակառակ տեօրեմայ։ Հաւասար աղեղներին համապատասխանում են հաւասար կենդրոնական անկիւններ։

Դիցուք թէ (նկր. 120) $\smile AB = \smile CD$. հարկաւոր է ապացուցանել որ $\angle AOB = \angle COD$։

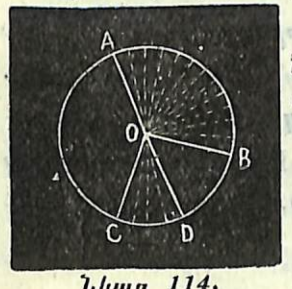
Ապաց. AB և CD աղեղների հաւասարութիւնից հետեւում է AB և CD լարերի հաւասարութիւնը։ Ուրեմն AOB և COD եռանկիւնները, որոնց երեք կողմերն էլ միմեանց հաւասար են, հաւասար են և այդ պատճառաւ $\angle AOD = \angle COD$։

Այս ասածներից հետեւում է, որ AB և CD (նկր. 113) երկու միմեանց ուղղահայեաց տրամագծերը, կազմելով կենդրոնի վերայ չորս ուղիղ անկիւն, շրջապատը բաժանում են չորս հաւասար մասն՝ AC, CB, BD և AD. այս մասերից իւրաքանչիւրը անուանվում է մի քառորդ շրջապատի կամ քվադրանտ։



Նկար 113.

§ 81. Կենդրոնական անկիւնները յարաբերում են միմեանց, որպէս իւրեանց աղեղները։



Նկար 114.

Թող AOB և COD (նկր. 114) լինեն երկու կենդրոնական անկիւն, հարկաւոր է ապացուցանել որ

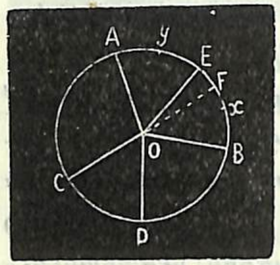
$$\frac{AOB}{COD} = \frac{\smile AB}{\smile CD}.$$

Ապաց. Ակնարկենք երկու դէպք։

1. Դէպք. երբ AB և CD աղեղ-

ները համաչափ են։ Դիցուք թէ ընդհանուր չափը m անգամ է պարունակվում AB աղեղի մէջ և n անգամ CD աղեղի մէջ, այնպէս, որ $\frac{\smile AB}{\smile CD}=\frac{m}{n}$. եթէ երեւակայենք շառաւիղներ AB և CD աղեղների բաժանող կէտերի վերայով, ապա AOB և COD անկիւնները կը բաժանվեն համապատասխանաբար m և n հաւասար մասների, այնպէս որ $\frac{AOB}{COD}=\frac{m}{n}$, ուրեմն,
$\frac{AOB}{COD}=\frac{\smile AB}{\smile CD}$։

2. Դէպք. երբ AB և CD աղեղները անհամաչափ են (նկր. 115). վերցնենք AB աղեղի վերայ AE մասը հաւասար CD աղեղին. միացնենք E կէտը O կէտի հետ, այնպէս որ $\angle AOE=\angle COD$, և կ'ապացուցենք որ $\frac{\smile AB}{\smile AE}$ համեմատութիւնը չէ կարող լինել ոչ մեծ, ոչ փոքր $\frac{AOB}{AOE}$ համեմատութիւնից։ Թող $\frac{AB}{AE}>\frac{AOB}{AOE}$, AE աղեղի փոխարէն վերցնենք Ax, որ աւելի մեծ է նորանից, այնպէս որ $\frac{AB}{Ax}=\frac{AOB}{AOE}$։ AB աղեղն բաժանելով այնպիսի հաւասար մասների որ նոցանից իւրաքանչիւրը լինի աւելի փոքր քան Ex, կը գտնենք որ գոնէ մինը բաժանող կէտերից կ'ընկնի E և x կէտերի մէջ, թող այդ կէտը լինի F, այն ժամանակ AB և AF աղեղները համաչափ են. և եթէ F և O կէտերը միացնենք, ապա կը ստանանք $\frac{AB}{AF}=\frac{AOB}{AOF}$.



Նկար 115.

Եթէ այս յարաբերութիւնը բաժանենք մեր ենթադրած

$$\frac{AB}{Ax}=\frac{AOB}{BOE}$$ յարաբերութեան վերայ և կրճատենք, կը ստանանք $\frac{Ax}{AF}=\frac{AOE}{AOF}$։

Բայց յարաբերութիւնը զուրկ է ճշմարտութիւնից, որովհետև $\frac{Ax}{AF}$ համեմատութիւնը մեծ է ամբողջից, իսկ $\frac{AOE}{AOF}$ համեմատութիւնը փոքր է ամբողջից։ Սորանից հետևեցնում ենք, որ մեր ենթադրած $\frac{AB}{AE}>\frac{AOB}{AOE}$ անհաւասարութիւնը տանում է մեզ սխալ եզրակացութեան և այդ պատճառաւ ճշմարիտ չէ։

Նոյն ձևով կարող ենք ապացուցանել, որ $\frac{AB}{AE}<\frac{AOB}{AOE}$ ենթադրութիւնը կը տանէ մեզ նոյնանման անկարելի եզրակացութեան, արժէ միայն AE փոխարէն վերցնել Ay աւելի փոքր աղեղն և կրկնել նախընթաց դատողութիւնները։ Այսպէս ուրեմն լինեն AB և CD աղեղները համաչափ թէ անհամաչափ մի և նոյն է. մենք միշտ կը ստանանք $\frac{AOB}{AOE}=\frac{AB}{AE}$ ։

§ 82. Նախընթաց § առաջարկութեան վերայ հիմնվում է անկիւնների չափումն իւրեանց աղեղներով։

Իւրաքանչիւր շրջապատ մենք բաժանում ենք 360 հաւասար մասներ, որք անուանվում են աստիճաններ, իւրաքանչիւր աստիճանը բաժանվում է

60 րոպէ, իւրաքանչիւր րոպէ—60 վայրկեանի *)։ Այսպէս ուրեմն իւրաքանչիւր շրջապատ պարունակում է իւր մէջ 360 աստիճան կամ 360.60=21600 րոպէ, կամ 21600.60=1296000վայրկեան։ Կիսաշրջապատը—180 աստիճան կամ 180.60=10800 րոպէ, կամ 10800.60=648000 վայրկեան. քառորդ շրջապատը կամ քվադրանտը—90 աստիճան կամ 90.60=5400 րոպէ, կամ 5400.60=324000վայրկեան։

Աստիճանը նշանադրվում է ^{0} նշանով, րոպէն $'$, իսկ վայրկեանը $''$։ Այսպէս օրինակի համար $75^0 17' 44'',8$ նշանակում է շրջանի աղեղն պարունակում է 75 աստիճան 17 րոպէ և 44,8 վայրկեան **)։

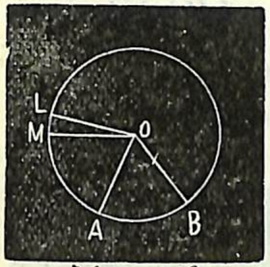
Եթէ երևակայենք շառաւիղներ դէպի բոլոր 360 կէտերը, որք բաժանում են շրջապատը աստիճանների, ապա կենդրոնի բոլորքը կը կազմվեն 360 հաւասար անկիւններ, որք անուանուում են անկիւնային րոպէներ, իսկ իւրաքանչիւր անկիւնային րոպէն բաժանվում է 60 հաւասար մասների, որք անուանվում են անկիւնային վայրկեաններ։

---

*) Գաղղիայում շրջապատները բաժանում են երբեմն 400 հաւասար մասը, որք անուանվում են գրադ, մի գրադը բաժանվում է 100 րոպէի, իսկ մի րոպէն—100 վայրկեանի։

**) Շրջապատի 360 մասը բաժանելը պատկանում է հին ժամանակներին, իսկ մի աստիճանի 60 րոպէ և մի րոպէի 60 վայրկեան բաժանելը, մենք պատահում ենք առաջին անգամ միայն յոյն աստղաբաշխների մօտ, 360 թիւը հաւասար է 2.2.2.3.3.5, ունենալով մեծ քանակութեան բաժանարարների ներկայացնում է մեծ յարմարութիւն գործնական կողմից։ Նա բաժանվում է ամբողջապէս 22 թուերի վերայ։

Ակներև է, որ իւրաքանչիւր ուղիղ անկիւն պարունակում է 90 անկիւնային աստիճան, բայց որովհետև ուղիղ անկեան մեծութիւնը անփոփոխ է, այդ պատճառաւ անկիւնային աստիճանը ևս անփոփոխ մեծութիւն է. Սորանումն է պարունակվում էական զանազանութիւնը անկիւնային և աղեղնային աստիճանների։ Աղեղնային աստիճանը կախումն ունի շրջապատի մեծութիւնից, այն ինչ անկիւնային աստիճանը ունի մի որոշեալ մեծութիւն. հէնց այդ պատճառաւ անկիւնային աստիճանի մեծութիւնը ընդունվում է իբրև միաւոր անկիւնները չափելու ժամանակ.

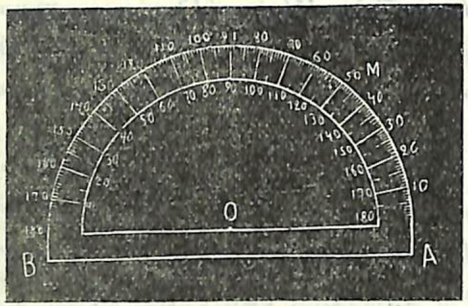


Նկար 116.

Թող LM (Նկր. 116) աղեղի աստիճանը, այսինքն շրջապատի 360 երորդ մասը և LOM անկիւնային աստիճանը։ Դիցուք թէ AB աղեղըն պարունակում է m^0, նշանակելով m տառով մի որ և իցէ ամբողջ կամ կոտորակ թիւ, ապա $AB=m.\ LM$։ Բայց § 81 հիման վերայ $\frac{AOB}{LOM}=\frac{AB}{LM}=m$ և որովհետև LOM անկիւնը ընդունված է իբրև միաւոր, ապա $AOB=m$։ Այդ կը նշանակէ որ իւրաքանչիւր կենդրոնական անկիւն պարունակում է իւր մէջ այնքան անկիւնային միաւոր, որքան իւր աղեղն պարունակում է աղեղնային միաւոր. որից խօսքերով կենդրոնական անկիւնը չափվում է իւր աղեղով կամ թէ կենդրոնական անկիւնը հաւասար է իւր աղեղին։

Այս բոլոր ասածներիցը հետևում է, որ ուղիղ անկիւնը չափվում է շրջապատի քառորդով։

§ 83. *Թղթի վերայ նկարած անկիւնները չափելու համար գործ են ածում մի տեսակ գործիք, որ անուանվում է անկիւնաչափ։ Նա բաղկացած է մի կիսաշրջանից, երբեմն և ամբողջ շրջանից (Նկր. 117), աստիճանների բաժանուած։ Իւրաքանչիւր բաժանմունքը ունի երկու համար, որից մինը ունենալով* BMA *ուղղութիւնը, գրվում էբաժանմունքների տակը, իսկ միւսը ունենալով* AMB *ուղղութիւնը, գրվում է նոցա վերև։ Մի որ և իցէ* AOM *անկիւնը չափելու համար դնում են նորա վերայ անկիւնաչափը, այնպէս որ դորա* O *կենդրոնը ընկնի անկեան գագաթի վերայ, իսկ* AB *տրամագիծը—նորա մի որ և իցէ կողմի վերայ։ Նշանակելով* M *կէտը, որտեղ անկեան միւս կողմը կըտրում է անկիւնաչափին, համարում ենք* A *և* M *մէջ գտնուած աստիճանների թիւը։*

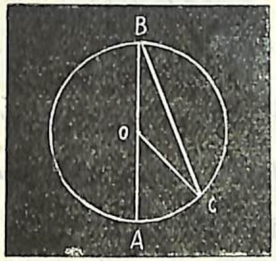


Նկար 117.

§ 84. Տ ե ո ր ե մ ա յ։ Իւրաքանչիւր ներսը գծած անկիւնը հաւասար է այն կենդրոնական անկեան կիսին, որ ունի մի եւ նոյն աղեղն։

Այս տեօրեմայի ապացուցութեան ժամանակ կը հանդիպենք երեք դէպքի։

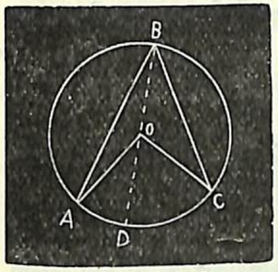
1. *Դէպք. Դիցուք թէ ներսը գծած* ABC *անկիւնը (Նկր. 118) կազմված է* AB *տրամագծից և* BC *լարից. հարկաւոր է ապացուցանել, որ* $ABC = \frac{AOC}{2}$.



Նկար 118.

Ապաց. § 40 *հետև. 1. հիման վերայ* $AOC = OBC + OCB$, *բայց որովհետև* OBC *եռանկիւնու մէջ* OB *և* OC *կողմերը որպէս շառաւիղներ հաւասար են միմեանց, ապա* $OCB = OBC$, *ուրեմն* $AOC = \frac{2OBC}{2}$ *կամ* $ABC = \frac{AOC}{2}$։

2. *Դէպք. Դիցուք թէ* ABC *(Նկր. 119) ներսը գծած անկիւնը կազմուած է* AB *և* BC *երկու լարից, որք գտնվում են կենդրոնի երկու կողմը, հարկաւոր է ապացուցանել որ* $ABC = \frac{AOC}{2}$։

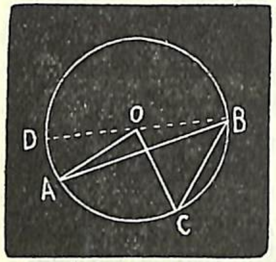


Նկար 119.

Ապց. Անց կացնելով BOD *տրամագիծը կը գտնենք ինչպէս նախընթաց դէպքում* $ABD = \frac{AOD}{2}$ *և* $CBD = \frac{COD}{2}$. *գումարելով միմեանց հետ այս հաւասարութիւնները կը գտնենք* $ABD + CBD = \frac{AOD + COD}{2}$, *կամ* $ABC = \frac{AOD}{2}$։

3. *Դէպք. Դիցուք թէ* ABC *(Նկր. 120) ներսը գըծած անկիւնը կազմվածէ կենդրոնից մի կողմը գըտն-*

ված AD և BC լարերից, հարկաւոր է ապացուցել, որ $ABC = \frac{AOC}{2}$։



Նկար. 120,

Ապց. Անց կացնելով DOB տրամագիծը, կը գտնենք: ինչպէս նախընթաց դէպքում $DBC = \frac{DOC}{2}$ և $DBA = \frac{DOA}{2}$. հանելով առաջին հաւասարութիւնից երկրորդը, կը գտնենք $DBC - DBA = \frac{DOC - DOA}{2}$

կամ թէ $ABC = \frac{AOC}{2}$։

Այսպէս ուրեմն ներսը գծած անկիւնը իւր բոլոր դէպքերում հաւասար է այն կենդրոնական անկեան կիսին, որ ունի մի և նոյն աղեղն։

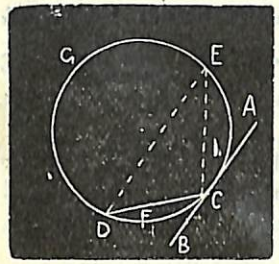
Այս առաջարկութիւնից հետևում է։

1. Իւրաքանչիւր ներսը գծած անկիւն չափվում է իւր աղեղի կիսով։

2. Ներսը գծած անկիւնները հաւասար են, եթէ ունեն մի և նոյն աղեղները։

3. Ներսը գծած անկիւնը, որ յենվում է տրամագծի վերայ, հաւասար է ուղիղ անկեանը, որովհետև նա չափվում է կիսաշրջանի կիսով, այսինքն շրջանի քառորդով։

§ 85. Տեորեմայ։ Լարից եւ շօշափող գծից կազմված անկիւնը չափվում է այն աղեղի կիսով, որ պարունակվում է այդ գծերի մէջ։



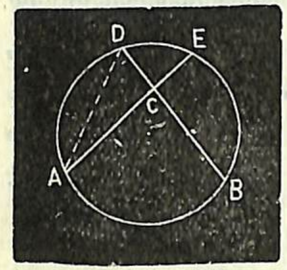
Նկար 121.

Դիցուք թէ DCB անկիւնը (նկր. 121) կազմուած է AB շօշափող գծից և CD լարից. հարկաւոր է ապացուցանել, որ DCB անկիւնը չափվում է DFC աղեղի կիսով։

Ապաց. Անցկացնելով DE լարը զուգահեռական AB գծին, կը տեսնենք որ DCB անկիւնը հաւասար է EDC անկեանը (§ 35). և DC աղեղն հաւասար է CE աղեղին։ Բայց EDC անկիւնը չափվում է EC աղեղի կիսով կամ DC աղեղի կիսով, ուրեմն DCB անկիւնը ևս չափվում է DC աղեղի կիսով։

Ակներև է, որ ACD անկիւնը բաղկացած լինելով CD լարից և CA շօշափողից և հաւասար լինելով ACE և ECD անկիւնների գումարին, չափվում է CE և EGD աղեղների գումարի կիսով, այսինքն CEGD աղեղի կիսով։

§ 86. Տեորեմայ։ Այն անկիւնը որի գագաթը գտնըվում է շրջանի մէջ, չափվում է իւր կողմերի եւ նոցա շարունակութեանց մէջ գտնուած աղեղների գումարի կիսով։



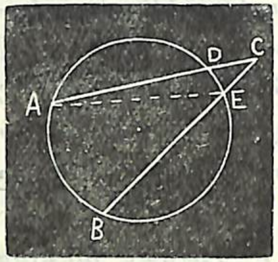
Նկար. 122.

Դիցուք թէ ACB (նկր. 122) այն անկիւնն է, որի գագաթը գտնվում է շրջանի մէջ, իսկ CE և CD նորա կողմերի շարունակութիւններն են. հարկաւոր է ապացուցանել, որ ACB անկեան չափը հաւասար է $\frac{AB + DE}{2}$։

Ապաց. A և D կէտերը միացնելով, կը գտնենք, որ $\angle ACB = \angle ADC + \angle DAC$. բայց ADB անկիւնը չափ-

վում է AB *աղեղի կիսով և* DAE *անկիւնը*—DE *աղեղի կիսով, ուրեմն* ACB *անկիւնը չափվում է* AB *և* DE *աղեղների գումարի կիսով։*

§ *87*. Տեորեմա։ Այն անկիւնը որի գագաթը գտընվում է շրջանից դուրս, չափվում է իւր կողմերի մէջ գտնված աղեղների տարբերութեան կիսով։

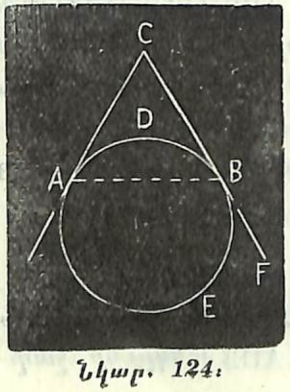


Նկր. 123.

Դիցուք թէ ACB (*Նկր. 123*) *անկեան գագաթը գտնվում է շրջանից դուրս. հարկաւոր է ապացուցանել որ* ACB *անկեան չափը հաւասար է* $\frac{AB-DE}{2}$։

Ապաց. A *և* E *կէտերը միացընելով կը գտնենք* ACB=AEB—CAE *բայց* AEB *անկիւնը չափվում է* AB *աղեղի կիսով, իսկ* CAE *անկիւնը*—DE *աղեղի կիսով, ուրեմն* ACB *անկիւնը չափվում է* AB *և* DE *աղեղների տարբերութեան կիսով։*

§ *88*. Տեորեմա։ Դուրսը գծած անկիւնը չափվում է իւր կողմերի մէջ գտնուած աղեղների տարբերութեան կիսով։



Նկր. 124.

Դիցուք թէ CA *և* CB *գծերը* (*Նկր. 124*) *շրջանին շօշափող են հարկաւոր է ապացուցանել, որ* ACB *անկեան չափը հաւասար է* $\frac{AEB-ADB}{2}$։

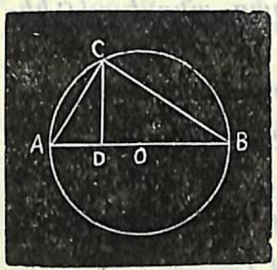
Ապաց. A *և* B *կէտերը միացնելով, կը ստանանք* ACB=ABF—CAB. *բայց* ABF *անկիւնը չափվում*

է AEB *աղեղի կիսով և* CAB *անկիւնը*—ADB *աղեղի կիսով. ուրեմն* ACB *անկիւնը չափվում է* AEB *և* ADB *աղեղների տարբերութեան կիսով։*

Այս առաջարկութիւնից հետեւում է, որ դուրսը գծած անկիւնները, պարունակելով իւրեանց մէջ հաւասար աղեղներ, հաւասար են միմեանց։

ՅԱՐԱԲԵՐԱԿԱՆ ԳԾԵՐԸ ՇՐՋԱՆԻ ՄԷՋ։

§ *73*. Տեորեմա։ Շրջապատի մի որ եւ իցէ կէտից դէպի տրամագիծը ցած թողած ուղղահայեացը միջին յարաբերականն է տրամագծի կտորների. Իսկ մի եւ նոյն կէտից դէպի տրամագծի մի ծայրը անց կացրած լարը միջին յարաբերականն է տրամագծին եւ իւր մօտ եղած կտորին։



Նկար 125.

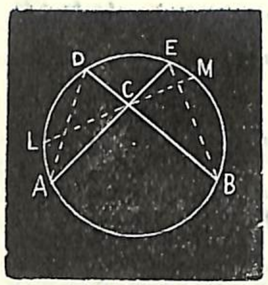
Թող AB *լինի տրամագիծը, իսկ* CD *ուղղահայեաց նորան թողած շրջապատի մի որ և իցէ կէտից. հարկաւոր է ապացուցանել, որ*

$$\frac{AD}{DC}=\frac{DC}{DB},\ \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB}։$$

Ապաց. C *և* B *կէտերը միացընելով և նկատելով որ* ACB *ուղիղ անկիւն է* (§ *84 դէպք 3*) *կը գտնենք,*

(§ *62*) $\frac{AD}{BC}=\frac{DC}{DB}.\ \frac{AD}{AC}=\frac{AC}{AB},$

§ *90* Տեորեմա։ Երկու լարեր, կտրվելով շրջանի մէջ, բաժանվում են հակառակ յարաբերական մասերի։



Նկար 126.

Դիցուք թէ AE և DB լարերը կտրվում են C կետում. հարկաւոր է ապացուցել որ $\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CE}$։

Ապաց. Անց կացնելով AD և BE լարերը. կը նկատենք, որ ADC և BCE եռանկիւնիները նման են, որովհետև $\angle DAC=\angle CBE$ և $\angle ADC=\angle CEB$ իսկ եռանկիւնիների նմանութիւնից հետևում է, որ $\frac{AC}{BC}=\frac{CD}{CE}$։

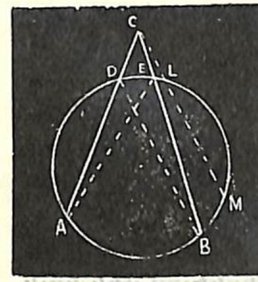
Վերցնելով այս յարաբերութեան ներքին և արտաքին անդամների արտադրեալը, կը ստանանք

$$AC.CE=BC.CD։$$

Ակներև է, որ մի ուրիշ LM լար, անցնելով C կետի վերայով բաժանվում է երկու մասի LC և CM, որոնց արտադրեալը LC.CM նոյնպէս հաւասար է AC.CE։ Դա կը նշանակէ, որ բոլոր լարերը անցնելով շրջանի մէջ գտնուած մի կետի վերայով, բաժանվում են այդ կետում այնպէս, որ իւրաքանչիւր լարի կտորների արտադրեալը մի անփոփոխ քանակութիւն է կազմում։

§ *91*. Տեորեմայ։ Երկու հատող գծեր, անցնելով շրջանից դուրս գտնուած մի կետի վերայով. հակառակ յարաբերական են իւրեանց արտաքին կտորներին։

Դիցուք C կետից անց են կացրած CA և CB հատող գծերը, հարկաւոր է ապացուցել, որ $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CD}$։



Նկար 127.

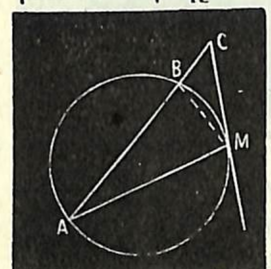
Ապաց. Անց կացնելով AE և DB լարերը, կը տեսնենք, որ AEC և DCB եռանկիւնիները նման են, որովհետև ունեն մի ընդհանուր անկիւն C և բացի այդ $\angle DAE=DBE$. եռանկիւնիների նմանութիւնից հետևում է $\frac{AC}{BC}=\frac{CE}{CD}$.

Վերցնելով ներքին և արտաքին անդամների արտադրեալը կը տեսնենք, որ

$$AC\cdot CD=BC\cdot CE։$$

Ակներև է, որ մի այլ CM հատող գիծ անցկացրած մի և նոյն C կետի վերայով կը տայ նոյնպէս MC.CL= AC. CD։ Դա կը նշանակէ, որ բոլոր հատող գծերը, անցնելով շրջանից դուրս գտնուած մի կետի վերայով, շրջապատով բաժանվում են այնպիսի մասների, որ իւրաքանչիւր հատող գծի արտադրեալը իւր արտաքին մասների վերայ անփոփոխ քանակութիւն է կազմում։

§ *92*. Տեորեմայ։ Շօշափող գիծը միջին յարաբերականն է ամբողջ հատող գծին եւ նորա արտաքին մասին։



Նկար 128.

Դիցուք C կետից անց կացրած CM շօշափող և CA հատող գծերը (նկր. 128). հարկաւոր է ապացուցել, որ $\frac{AC}{BC}=\frac{CM}{CB}$։

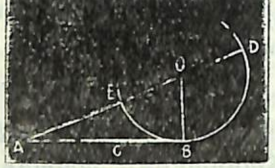
Ապաց. Անցկացնելով AM և BM լարերը, կը տեսնենք. որ ACM և BCM եռանկիւնիները ունեն մի ընդհանուր C անկիւն. բացի այդ BAM և BMC անկիւնները, ունենալով մի և նոյն $\frac{BM}{2}$ չափը, հաւասար են (§ 94). ուրեմն եռանկիւնիները նման են և այդ պատճառաւ

$$\frac{AC}{CM}=\frac{CM}{CB}.$$

Վերցնելով ներքին և արտաքին անդամների արտադրեալը, կը տեսնենք որ $AC \cdot CB = CM^2$, սորանից հետեւում է, որ բոլոր հատող գծերը անցնելով մի և նոյն արտաքին կէտի վերայով՝ շրջապատով բաժանվում են այնպէս, որ իւրաքանչիւր հատող գծի արտադրեալը իւր արտաքին մասի վերայ հաւասար է այն շօշափող գծի երկրորդ աստիճանին, որը անց է կացրած մի և նոյն կէտի վերայով։

§ *93.* Խնդիր։ Բաժանել AB (նկր. *129)* գիծը ներքին եւ արտաքին յարաբերութեամբ։

*Լուծումն։ Բաժանել մի գիծ ներքին և արտաքին յարաբերութեամբ, կը նշանակէ. բաժանել նորան այնպիսի երկու մասը, որ մեծ կտորը լինի միջին յարաբերական ամբողջ գծի և նորա փոքր կտորի մէջ *)։*



Նկար 129.

Կանգնեցնելով B կէտում ուղղահայեաց AB գծին, վերցնենք նորա վերայ $OB=\frac{AB}{2}$ և O կէտի շուրջ OB շառաւիղով գծենք շրջապատ, յետոյ միա-

ցնելով շրջանի կենդրոնը A կէտի հետ, շարունակենք մինչև D կէտը, վերցնենք AB գծի վերայ AC մասը $=$ AE։ Այսպիսով AB գիծը կը բաժանուի ներքին և արտաքին յարաբերութեամբ, արդարև նախընթաց § հիման վերայ $\frac{AD}{AB}=\frac{AB}{AE}$. իսկ այստեղից կը գտնենք $\frac{AD-AB}{AB}=\frac{AB-AE}{AE}$ բայց որովհետև $AD-AB=AE=AC$ և $AB-AE=CB$

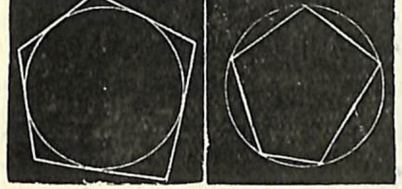
$$\text{ապա } \frac{AC}{AB}=\frac{CB}{AC}.$$

իսկ եթէ տեղափոխենք արտաքին և ներքին անդամները, ապա կը ստանանք

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AC}{CB}.$$

ՇՐՋԱՆԻ ՆԵՐՍԸ ԳԾԱԾ ԵՒ ԴՈՒՐՍԸ ԳԾԱԾ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆԻՆԵՐ։

§ *94.* *Բազմանկիւնին անուանվում է շրջանի ներսը գծած, երբ նորա բոլոր անկիւնները ներսը գծած անկիւններ են (§ 88). (նկր. 130)—դուրսը գծած, երբ նորա բոլոր անկիւնները դուրսը գծած են (նկր. 131).*



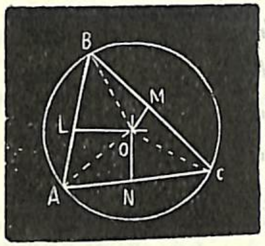
Նկար. 130 և 131.

Այն շրջանը, որի մէջ բազմանկիւնին ներսը գծած է, անուանվում է դուրսը գծած շրջան (նկր. 131), իսկ այն շրջանը, որի շուրջը բազմանկիւնին դուրսը գծած է, անուանվում է ներսը գծած շրջան (նկր, 130)

Ակներև է, որ դուրսը գծած բազմանկիւնու կողմերը շօշափող գծեր են շրջանին։

§ *95.* Տեօրեմայ։ Իւրաքանչիւր եռանկիւնու շուրջը կարելի է գծել շրջան։

**) Գծի բաժանումն երկու այնպիսի մասն, որ մեծ կտորը լինի միջին յարաբերական ամբողջի և նորա փոքր կտորի մէջ Էքկլիդոսը անուանել է բաժանումն ներքին և միջին յարաբերութեամբ։ Այս բաժանումն* Sectio divina *և երբեմն*—sectio auvea. *առաջին անունը տալուն երևի առիթ է եղել* Luca Pacioli *վարդապետի նշանաւոր գիրքը, որ անուանվում է* Divina proportione... (1509):



Նկար 132.

Ապաց. ABC (նկր. 132) եռանկիւնու AB և BC կողմերը, բաժանելով երկու հաւասար մաս և կանգնեցնենք նոցա միջի L և M կէտերից ուղղահայեացներ, որք կը կտրվեն O կէտում, այդ կէտից անց կացնենք OA, OB և OC ուղիղ գծերը· OAL և BOL ուղղանկիւն եռանկիւնիները ունեն մի ընդհանուր OL էջ, բացի այդ AL=LB, ուրեմն նոքա հաւասար են միմեանց և այդ պատճառաւ AO=OB։ Նմանապէս BOM և COM ուղղանկիւն եռանկիւնիները, ունենալով մի ընդհանուր OM էջ և BM=MC հաւասար են միմեանց և այդ պատճառաւ BO=OC։ Սորանից հետեւում է, որ OA շառաւիղով O կէտի շուրջը գծած շրջանը, կանցնի ABC եռանկիւնու բոլոր երեք գագաթների վերայով։

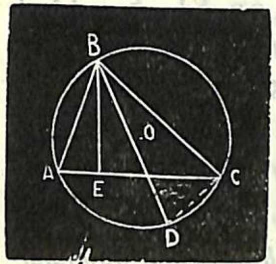
Այսպէս ուրեմն եռանկիւնու դուրսը գծած շրջանի կենդրոնը գտնվում է այն ուղղահայեացների համաման կէտի վերայ, որոնք կանգնեցրած են եռանկիւնու երկու կողմերի մէջ տեղերից։

Ակներև է, որ մի եռանկիւնու շուրջը կարելի է միայն մի շրջան դուրսը գծել, որովհետև այդպիսի շրջանի կենդրոնը պիտի գտնուի LO և MO ուղղահայեացների համաման կէտի վերայ։

Միացնելով O կէտը AC կողմի մէջ տեղի N կէտի հետ (նկր. 132). կը գտնենք որ AON և CON եռանկիւնիները. ունենալով մի ընդհանուր կողմ ON և բացի այդ AN=NC և ինչպէս ապացուցեցինք AO=OC, հաւասար են միմեանց (§ 18). ուրեմն ANO անկիւնը. հաւասար է CNO անկեանը, այսինքն ON ուղղահա-

յեաց է AC գծին։ Սորանից հետևում է, որ ուղղահայեացը կանգնեցրած AC կողմի մէջ տեղի կէտի վերայ անցնում է O կէտի վերայով, ուրեմն բոլոր երեք ուղղահայեացները որոնք կանգնեցրած են եռանկիւնու երեք կողմերի մէջտեղի կէտերի վերայ ընդհատվում են մի կէտում։

Դիցուք թէ ABC (նկր. 133) եռանկիւնու դուրսը գծած շրջանի կենդրոնը է O, անց կացնենք BD տրամագիծը և BE գիծը ուղղահայեաց AC կողմին, եթէ միացնենք D և C կէտերը, ապա BCD անկիւնը, որ յենուած է BD տրամագծի վերայ, ուղիղ անկիւն է. բացի այդ BAE և BDC անկիւնները, որք ձգվում են մի և նոյն BC աղեղով հաւասար են (§ 84 հետ 3). ուրեմն ABE և DBC ուղղանկիւն եռանկիւնիները նման են և այդ պատճառաւ $\frac{AB}{BD}=\frac{BE}{BC}$։

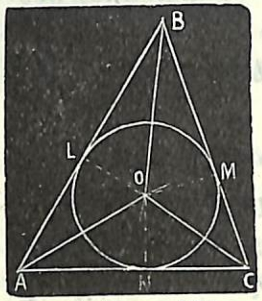


Նկար 133.

Դուրսը գծած շրջանի շառաւիղը անուանենք R, այնպէս որ BD=2R և դիցուք թէ BC=a, AB=c և վերջապէս թող եռանկիւնու BE բարձրութիւնը լինի h, այն ժամանակ նախընթաց հաւասարութիւնը կը ստանայ $\frac{c}{2R}=\frac{h}{a}$ ձևը, իսկ սորանից $R=\frac{ac}{2h}$։ այսինքն դուրսը գծած շրջանի շառաւիղը հաւասար է եռանկիւնու երկու կողմերի արտադրեալին բաժանած նորա կրկնապատիկ բարձրութեան վերայ։

§ 96. Տեօրեմայ։ Իւրաքանչիւր եռանկիւնու մէջ կարելի է ներսը գծել շրջան։

Ապաց. ABC (*Նկր. 134*) *եռանկիւնու* A *և* B *երկու անկիւնները բաժանելով երկու հաւասար մասների* AO *և* BO *գծերով, դոցա ընդհատման կետից ցած ենք թողնում* OL, OM *և* ON *ուղղահայացները, դէպի եռանկիւնու կողմերը։* AON *և* AOL *ուղղանկիւն եռանկիւնիները ունեն մի ընդհանուր ներքնագիծ և* $\angle LAO=\angle NAO$, *ուրեմն նոքա հաւասար են միմեանց և այդ պատճառաւ*— ON=OL։ *Նմանապէս* OLB *և* MOB *ուղղանկիւն եռանկիւնիները, ունենալով մի ընդհանուր* OB *ներքնագիծ և* $\angle LBO=\angle MBO$, *հաւասար են միմեանց, և այդ պատճառաւ* LO=OM. *սորանից հետեւում է, որ* OL *շառաւիղով* O *կետից գծած շրջապատը շօշափող կը լինի եռանկիւնու բոլոր երեք կողմերին։*

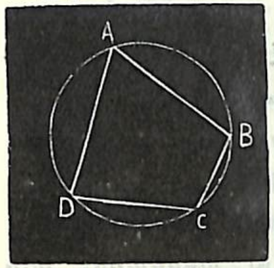


Նկար. 134

Այսպէս ուրեմն եռանկիւնու ներսը գծած շրջանի կենդրոնը գտնվում է այն կետի վերայ, ուր ընդհատվում են այն երկու գծերը, որոնք եռանկիւնու երկու անկիւնները հաւասար կէսեր են անում։

Եթէ O *կետը միացնենք եռանկիւնու* C *երրորդ գագաթի հետ, ապա* NOC *և* MOC *ուղղանկիւն եռանկիւնիները ունենալով մի ընդհանուր* OC *ներքնագիծ և ինչպէս ապացուցեցինք* ON=OM *հաւասար են* (§ *25*). *ուրեմն* $\angle NCO=\angle MCO$։ *Սորանից հետեւում է, որ եռանկիւնու երրորդ անկիւնը երկու կէս բաժանող գիծը անցնում է* O *կետի վերայով, այնպէս որ բոլոր երեք գծերը բաժանելով եռանկիւնու բոլոր անկիւնները երկու հաւասար կէսի, ընդհատվում են մի կետում։*

§ *97.* **Տէօրեմայ։** Իւրաքանչիւր ներսը գծած քառանկիւնու հակառակ անկիւնների գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեանց։



Նիար 135.

Դիցուք թէ ABCD (*Նկր. 135*) *ներսը գծած քառանկիւնի է. հարկաւոր է ապացուցել, որ* $\angle DAB+\angle BCD=2d$։

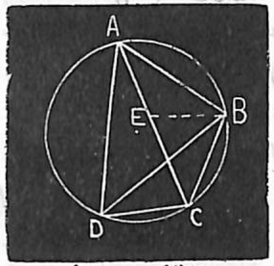
Ապաց. Որովհետև DAB *անկիւնը չափվում է* DCB *աղեղի կիսով* (§ *84 Հ. 1*) *և* DCB *անկիւնը չափվում է* DAB *աղեղի կիսով, ապա* DAB *և* DCB *անկիւնների գումարը չափվում է* DAB *և* DCB *աղեղների գումարի կիսով, այսինքն կիսաշրջանով, իսկ կիսաշրջանը երկու ուղիղ անկեան չափն է։*

Հակառակ թէօրեմայ։ Իւրաքանչիւր ABCD քառանկիւնու շուրջը կարելի է դուրսը գծել շրջապատ, եթէ նորա հակադիր անկիւնների գումարը հաւասար է երկու ուղիղ անկեան։

Ապաց. Դիցուք թէ $\angle DAB+\angle DCB=2d$, *անց կացնենք* D, A *և* B *կետերի վերայով շրջապատ, դա անպատճառ կանցնի և* C *չորրորդ կետի վերայով, որովհետև եթէ* C *կետը մնար շրջանի մէջ, ապա* A *և* C *անկիւնների գումարը կը լինէր աւելի քան* 2d, *որ հակառակ է առաջարկութեանը. իսկ եթէ* C *կէտը մնար շրջանից դուրս, ապա* A *և* C *անկիւնների գումարը կը լինէր աւելի քիչ քան* 2d, *որ նոյնպէս հակառակ է առաջարկութեանը։*

Սորանից երևում է որ այդպիսի քառանկիւնու շուրջ կարելի է դուրսը գծել շրջապատ։

§ 98. Տեորեմայ: *Իւրաքանչիւր ներսը գծած քառանկիւնու անկիւնագծերի արտադրեալը հաւասար է հակառակ կողմերի արտադրեալների գումարին:*



Նկար 136.

Դիցուք թէ ABCD (*նկր. 136*) *ներսը գծած քառանկիւնի է. հարկաւոր է ապացուցել, որ* *)

$$BD \cdot AC = AB \cdot DC + AD \cdot BC.$$

Ապաց. Կերցնենք ABE *անկիւնը հաւասար* DBC *անկեանը, այն ժամանակ* ABE *և* DBC *եռանկիւնիները նման կը լինեն, որովհետև ունեն* BAE *անկիւնը հաւասար* BDC *անկեանը և* $\angle BAE \angle BDC$, *որովհետև ձգվում են* BC *աղեղով, ուրեմն*

$$\frac{BD}{AB} = \frac{DC}{AE} \text{ կամ}$$
$$BD \cdot AE = AB \cdot DC.$$

Յետոյ, եթէ ABE *և* DBC *հաւասար անկիւնների իւրաքանչիւրի վերայ աւելացնենք* EBD, *ապա կը ստանանք* ABD *և* EBC *հաւասար անկիւնները. բայց որովհետև* BCA *և* BDA *անկիւնները ձգվում են մի և նոյն* AB *աղեղով, ուրեմն նոքա հաւասար են միմեանց և այդ պատճառաւ* EBC *և* ABD *եռանկիւնիները նման են. ուրեմն*

$$\frac{BD}{BC} = \frac{AD}{EC} \text{ կամ}$$
$$BD \cdot EC = BC \cdot AD:$$

---

*) *Այս երևելի առաջարկութիւնը անուանվում է Պտղոմէոսի տէորեմայ. որովհետև առաջին անգամ երևեցաւ Պտղոմէոսի հեղինակութեան մէջ (երկրորդ դարում Ք. Ծ. առաջ), որ յայտնի է գրութեան մէջ Ալմագեստ անուամբ.*

այս և բարձրի հաւասարութիւնները գումարելով միմեանց հետ կը ստանանք

$$BD(EA+EC) = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

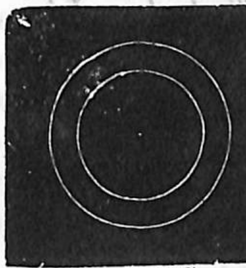
և որովհետև $AE+CE=AC$

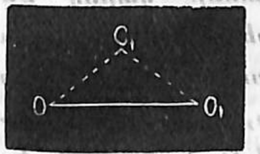
այդ պատճառաւ

$$BD \cdot AC = AB \cdot DC + AD \cdot BC$$

ԵՐԿՈՒ ՇՐՋԱԳԱՏՆԵՐԻ ՓՈԽԱԴԱՐՁ ԴՐՈՒԹԻՒՆԸ:

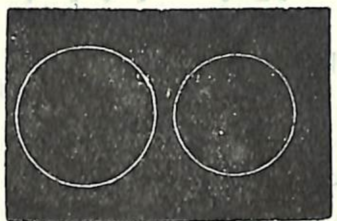
§ 99. *Շրջագատները, ունենալով մի ընդհանուր կենդրոն (նկ. 137), անուանվում են համակենդրոն, իսկ շրջագատները չունենալով մի ընդհանուր կենդրոն, անուանվում են հակակենդրոն շրջագատներ:*


Նկար 107.



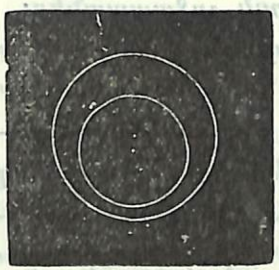
Նկար 138.

Երկու շրջագատներ չեն կարող հատուել, եթէ նոցա շառաւիղների գումարը փոքր է նոցա կենդրոնների հեռաւորութենից. արդարև թող O *և* O_1 (*նկար. 138*) *նոցա կենդրոնները լինեն, իսկ* r *և* r_1 *նոցա շառաւիղները և դիցուք թէ* $r+r_1 < OO_1$: *Եթէ այս շրջագատները ընդհատվելիս լինէին մի որ և իցէ* C *կէտում, ապա կը ստանայինք* $OC+O_1C > OO_1$, *որից հետևում է* $r+r_1 > OO_1$, *որ հակառակ է առաջարկութեանը: Այս դէպքում մի շրջագատ գտնվում է միւս շրջագատից դուրս (նկր. 139) բայց և երկու շրջագատները չեն կարող ընդհատ-*



Նկար 139.

վել եթէ նոցա շառաւիղների տարբերութիւնը մեծ է նոցա կենդրոնների հեռաւորութիւնից։ Արդարև թող O և O_1 նոցա կենդրոնները լինեն (նկր. 138), իսկ r և r_1 նոցա շառաւիղները և դիցուք թէ $r-r_1>OO_1$։ Եթէ շրջապատները հատավելիս լինէին մի որ և իցէ C կետում, ապա կը ստանայինք $OC-O_1C<OO_1$ (§ 13), որից հետևում է $r-r_1<OO_1$, որ հակառակ է առաջարկութեանը։ Այս դէպքում մի շրջապատ գտնվում է միւս շրջապատի մէջ (նկր. 140)։



Նկար 140.

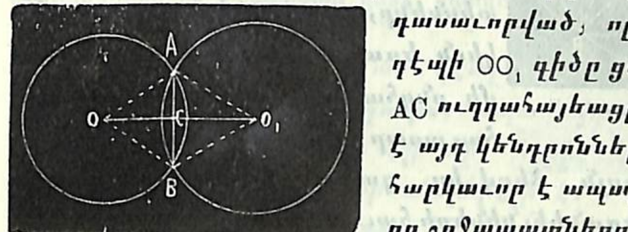
Այս սամծներից դուրս ենք բերում շրջապատների հատման պայմանները. Երկու շրջապատներ հատվում են միայն այն ժամանակ երբ նոցա կենդրոնների հեռաւորութիւնը փոքր է շառաւիղների գումարից եւ մեծ է շառաւիղների տարբերութիւնից։

Ակներև է, որ երկու շրջապատներ կարող են հատուել ոչ աւելի քան երկու կետերում, որովհետև եթէ ենթադրէինք, որ երկու հատող շրջապատներ ունենային երեք ընդհանուր կետեր, ապա երեք կետերի վերայով կ՚անցնէին երկու միմեանցից տարբեր շրջապատներ, որ հակառակ է § 95.

§ 100. Տեորեմայ։ Երկու հատուող շրջապատներ, ունեն միշտ երկու ընդհանուր կետ։

Ակնածենք երկու դէպք։

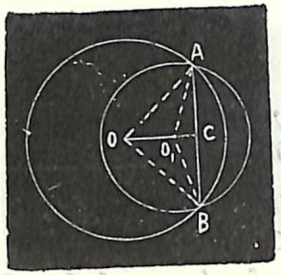
1. Դէպք։ Թող A լինի երկու շրջանների հատման կէտը, դիցուք թէ O և O_1 կենդրոնները այնպէս են դասաւորված, որ A կետից դէպի OO_1 գիծը ցած թողած AC ուղղահայեացը անցնում է այդ կենդրոնների միջով, հարկաւոր է ապացուցանել, որ շրջապատները ունեն էլի մի ընդհանուր կէտ։ (նկ. 141)



Նկար. 141.

Ապաց. Շարունակելով AC ուղղահայեացը և վերցնելով նորա վերայ $CB=CA$, միացնենք A և B կետերը O և O_1 կետերի հետ, կը տեսնենք որ OCA և OCB ուղղանկիւն եռանկիւնները, ունենալով մի ընդհանուր OC էջ և բացի այդ $CA=CB$, հաւասար են միմեանց, ուրեմն $OA=OB$. Նոյն ձևով կը գտնենք O_1CA և O_1CB ուղղանկիւն եռանկիւնների հաւասարութիւնից, որ $O_1A=O_1B$, սորանից հետևում է, որ B կէտը պատկանում է երկու շրջապատներին ևս, ուրեմն B նոցա երկրորդ ընդհանուր կէտն է։

2. Դէպք. Դիցուք թէ A լինի երկու շրջապատների հատման կէտը, իսկ O և O_1 նոցա կենդրոնները, այնպէս դասաւորուած, որ երկուսն էլ գտնվում են այն AC ուղղահայեացի մի կողմը, որ ցած է թողած A կետից դէպի O և O_1 կենդրոնները միացնող գիծը. հարկաւոր է ապացուցանել, որ շրջապատները ունեն էլի մի ընդհանուր կէտ։ (նկր. 142)



Նկար 142.

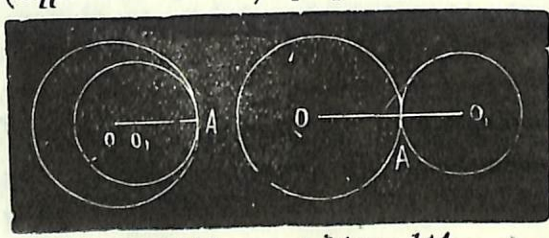
Ապաց. Շարունակելով AC ուղղահայեացը և վերցնելով նորա վերայ CB=CA, միացնենք A և B կէտերը O և O_1 կէտերի հետ, կը տեսնենք, որ OCA և OCB ուղղանկիւն եռանկիւնները, ունենալով մի ընդհանուր OC էջ, և AC=CB, հաւասար են միմեանց, ուրեմն OA=OB. նոյն ձևով կը գտնենք O_1CA և O_1CB ուղղանկիւն եռանկիւնների հաւասարութիւնից. որ $O_1A=O_1B$. սորանից հետևում է, որ B կէտը պատկանում է երկու շրջապատներին ևս, այսինքն B է նոցա երկրորդ ընդհանուր կէտը։

Այս ասածներիցը հետևում է.

1) Երկու շրջապատների հատման կէտերը միացնող գիծը ուղղահայեաց է այդ շրջանների կենդրոնները միացնող գծին։

2) Եթէ երկու շրջապատներ ունեն մի ընդհանուր կէտ, որ գտնվում է նոցա կենդրոնները միացնող գծից դուրս, ապա նոքա ունեն և մի ուրիշ ընդհանուր կէտ։

§) 101. Երկու շրջապատներ, ունենալով միայն մի ընդհանուր կէտ, անուանվում են շօշափող շրջապատներ (Նկր. 143 և 144). իսկ նոցա ընդհանուր կէտը անուանվում է շօշափման կէտ



Նկար. 143. Նկար 144.

շօշափումն անուանվում է ներքին, (Նկր. 143) երբ մի շրջապատը գտնվում է միւսի մէջ, և արտաքին (Նկր. 144) երբ նոքա գտնվում են շօշափման կէտի երկու կողմն։

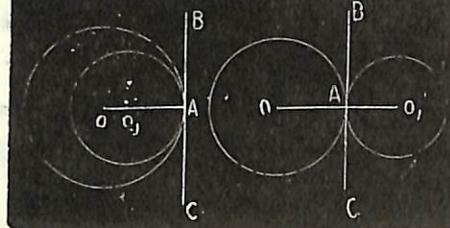
§ 102. Տեօրեմայ։ Երկու շօշափող շրջապատների կենդրոնները և շօշափման կէտը գտնվում են մի ուղիղ գծի վերայ։

Ապաց. Եթէ շօշափման կէտը գտնուէր կենդրոնները միացնող գծից դուրս, ապա այդ երկու շրջապատները կ'ունենային էլի մի ուրիշ ընդհանուր կէտ. (§ 100 հետև. 2) որ անկարելի է։

Այս առաջարկութիւնից հետևում է։

1. Երկու շրջապատներ ունեն ներքին շօշափումն երբ նոցա կենդրոնների հեռաւորութիւնը հաւասար է շառաւիղների տարբերութեանը, իսկ արտաքին շօշափումն, երբ այդ տարածութիւնը հաւասար է նոցա շառաւիղների գումարին։

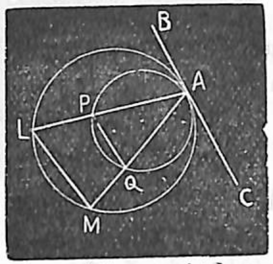
2. Երկու շօշափող շրջապատներ իրեանց շօշափման կէտում ունեն միայն մի ընդհանուր շօշափող գիծ BC (Նկր. 145 և 146)։



Նկար. 145. Նկար. 146

Արդարև, ենթադրելով որ CB գիծը շօշափող է շրջանին, որ գծած է O կենդրոնի շուրջ, և OA գիծը ուղղահայեաց է BC գծին, կը գտնենք նախընթաց տեօրեմայի հիման վերայ, որ O_1A նոյնպէս ուղղահայեաց է BC գծին, այսինքն BC նոյնպէս շօշափող է O_1 կենդրոնի շուրջ գծած շրջապատին։

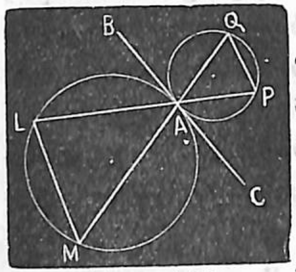
§ 103. Տեօրեմայ։ Եթէ ներքին կամ արտաքին շօշափման կէտից անց կացնենք երկու հատող գծեր, ապա դոցա հատման կետերը միացնող լարերը միմեանց զուգահեռական են։



Նկր. 147

Նախ՝ ենթադրենք թէ ներքին շօշափման A կետից (նկր. 147) անց են կացրած AL և AM գծերը. հարկաւոր է ապացուցանել, որ LM ∥ PQ։

Ապաց. Անց կացնելով CB շօշափող գիծը՝ կը գտնենք, որ ∠LAB =∠LMA և ∠PAB=∠PQA, ուրեմն ∠LMA=∠PQA և այդ պատճառաւ LM և PQ գծերը զուգահեռական են։



Նկար 148.

Եւ երկրորդ՝ ենթադրենք թէ, արտաքին. շօշափման A կետից (նկր. 148), անց են կացրած LP և MQ գծերը, հարկաւոր է ապացուցանել, որ LM ∥ PQ։

Ապաց. Անց կացնելով BC շօշափողը, կը գտնենք (§ 85). ∠LAB=∠LMA և ∠CAP=∠PQA, բայց LAB և CAP որպէս հակադիր անկիւններ հաւասար են, ուրեմն ∠LMA=∠PQA և այդ պատճառաւ LM և PQ գծերը զուգահեռական են։

ԳԼՈՒԽ VII

ԿԱՆՈՆԱՒՈՐ ԲԱԶՄԱՆԿԻՒՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ.

Դուրսը եւ ներսը գծած կանոնաւոր բազմանկիւնները.

§ 104. Բազմանկիւնին, որի բոլոր կողմերը հաւասար են միմեանց, և բոլոր անկիւնները նոյնպէս հաւասար են, անուանվում է կանոնաւոր բազմանկիւնի. օրինակի համար հաւասարակողմ եռանկիւնին կանոնաւոր եռանկիւնի է, քառակուսին կանոնաւոր քառանկիւնի է։ Կանոնաւոր բազմանկիւնին որոշելուց հետևում է.

1. Որովհետև իւրաքանչիւր բազմանկիւնու մէջ, որ ունի n կողմ, ներքին անկիւնների գումարը հաւասար է 2d(n−2), ապա n կողմանի կանոնաւոր բազմանկիւնու իւրաքանչիւր ներքին անկիւնը հաւասար է $\frac{2d(n-2)}{n}$*, ուրեմն կանոնաւոր բազմանկիւնու ներքին անկիւնը կախումն ունի միայն նորա կողմերի քանակութիւնից։*

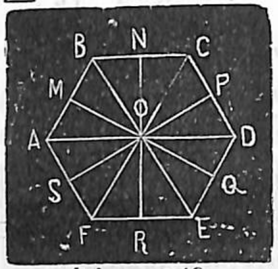
2. Կանոնաւոր համանուն բազմանկիւնները, այսինքն այնպիսիները, որոնց կողմերի թիւը միևնոյնն է, ունեն հաւասար անկիւններ։

3. Կանոնաւոր համանուն բազմանկիւնները նման են, որովհետև նոցա անկիւնները հաւասար են միմեանց և կողմերը յարաբերական։

4. Կանոնաւոր համանուն բազմանկիւնիների շըրջագծերը յարաբերում են միմեանց ինչպէս նոցա կողմերը։

§ 105. Տեորեմայ։ Իւրաքանչիւր կանոնաւոր բազմանկիւնու շուրջ կարելի է դուրսը գծել շրջապատ։

Ապաց. Դիցուք թէ ABCDEF *(նկր. 149) կանոնաւոր բազմանկիւնի է.* $AB=BC=CD\cdots$ $\angle A=\angle B=\angle C=\cdots$



Նկար 149.

Եթէ A *և* B *երկու անկիւնները բաժանենք երկու կէս* AO *և* BO *ուղիղ գծերով, ապա դոցա հատման* O *կէտը կը լինի կենդրոն դուրսը գծած շրջանի։ Արդարև, միացնելով* O *կէտը բազմանկիւնու բոլոր գագաթների հետ և անց կացնելով այդ կետից ուղղահայեացներ դէպի բոլոր կողմերը, կը նկատենք որ* AOB *եռանկիւնին հաւասարասրունք է, որովհետև* ABO *և* BAO *անկիւնները որպէս հաւասար անկիւնների կէսեր, հաւասար են միմեանց, ուրեմն* $AO=OB$ *և* $AM=MB$ (§ *25 հետև.), այսինքն* OM *ուղղահայեացը բաժանում է* AB *կողմը երկու հաւասար մասն։ Յետոյ* AOB *և* BOC *եռանկիւնիները ունենալով մի ընդհանուր* OB *կողմը և բացի այդ* $AB=BC$ *և* $\angle ABO=\angle CBO$, *հաւասար են, ուրեմն* BOC *եռանկիւնին նոյնպէս հաւասարսրունք է և* $\angle CBO=\angle BCO$ *սորանից հետևում է, որ* CO *գիծը* C *անկիւնը բաժանում է 2 հաւասար մասը, իսկ* ON *ուղղահայեացը բաժանում է* BC *կողմն երկու հաւասար մասը և*

$$AO=BO=CO \text{ և } OM=ON$$

Նոյնպէս կը գտնենք, որ BOC *և* COD *եռանկիւնիները, որք ունեն մի ընդհանուր* OC *կողմն, բացի այդ* $BC=CD$ *և* $\angle BCO=\angle DCO$, *հաւասար են միմեանց, ուրեմն* COD *եռանկիւնին նոյնպէս հաւասարասրունք է և* $\angle CDO=\angle DCO$. *սորանից հետևում է, որ* DO *գիծը* D *անկիւնը բաժանում է երկու հաւասար մասն, իսկ* OP *ուղղահայեացը* CD *կողմն է բաժանում երկու հաւասար մասն, և* $OC=OD$, $ON=OP$.

հետևապէս

$$OA=OB=OC=OD=OE=OF$$
$$OM=ON=OP=OQ=OR=OS$$

Այսինքն O *կէտը բազմանկիւնու բոլոր գագաթներից և նորա կողմերից հաւասար հեռաւորութեան վերայ է գտնվում, ուրեմն եթէ* O *կետից* OA *շառաւիղով գծենք շրջապատ, ապա կանցնի նա բոլոր* A, B, C... *կետերի վերայով և այդ պատճառաւ կը լինի բազմանկիւնու շուրջ դուրսը գծած շրջապատ։*

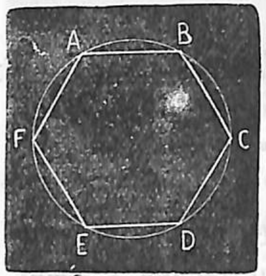
O *կէտը, բազմանկիւնու դուրսը գծած շրջանի կենդրոնը, միևնոյն ժամանակ անուանվում է բազմանկիւնու կենդրոն,* OA *գիծը անուանվում է շառաւիղ դուրսը գծած շրջանի. իսկ* OM *ուղղահայեացը, ցած թողած կենդրոնից դէպի բազմանկիւնու մի կողմը՝ անուանվում է ապոթէմայ։*

Այս § *տուած դատողութիւններից հետևում է.*

1. Բոլոր գծերը բաժանելով կանոնաւոր բազմանկիւնու բոլոր անկիւնները երկու հաւասար մասների, հանդիպում են միմեանց մի կետում, այն է բազմանկիւնու կենդրոնում, այս կետում նոյնպէս հանդիպում են այն ուղղահայացները, որք կանգնեցրած են բազմանկիւնու բոլոր կողմերի կէսերից։

2. Բազմանկիւնու կենդրոնը գտնելու համար, փոխանակ երկու անկիւնը բաժանելով երկու կէսի, կարելի է բաժանել նորա երկու կողմերը և բարձրացնել բաժանող կէտերից ուղղահայեացներ, որք հանդիպելով միմեանց որոշում են բազմանկիւնու կենդրոնը։

3. Կենդրոնի շուրջ գտնուած բոլոր անկիւնները հաւասար են միմեանց և նոցանից իւրաքանչիւրը հաւասար է 4 ուղիղանկեան բաժանած բազմանկիւնու կողմերի թուի վերայ։



Նկար 150.

4. Շրջանի ներսը գծած ABCDEF հաւասարակողմ բազմանկիւնին (Նկր. 150) միևնոյն ժամանակ կը լինի հաւասարանկիւն, այսինքն կանոնաւոր, որովհետև AB, BC, CD... աղեղները, որք ձգում են բազմանկիւնու կողմերը, հաւասար լինելով, հաւասար են և բազմանկիւնու անկիւնները, որովհետև նոքա չափվում են այդ աղեղներով։

5. Տրամագիծը, անցնելով կանոնաւոր ներսը գծած բազմանկիւնու մի որ և իցէ անկեան գագաթից, կամ նորա կողմերից մինի մէջ տեղից, բաժանում է բազմանկիւնին երկու հաւասար կիսի, արդարև այդպիսի տրամագիծը անպատճառ կ՚անցնի կամ հակադիր անկեան գագաթից, կամ հակադիր կողմի մէջ տեղից, որովհետև տրամագիծը բաժանում է շրջապատը երկու հաւասար մասի, այդ մասները միմեանց վերայ դնելով

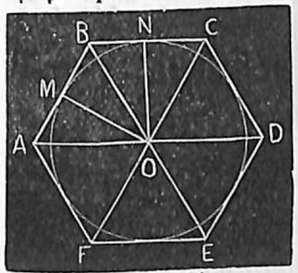
ինչպէս կիսաշրջանները, նոյնպէս և ներսը գծած բազմանկիւնու մասները իրար կը ծածկեն։

§ 106. Տեօրեմայ։ Իւրաքանչիւր կանոնաւոր բազմանկիւնու մէջ կարելի է ներսը գծել շրջան։

Ապաց. Որովհետև, նախընթաց § հիման վերայ, բազմանկիւնու կենդրոնը նորա բոլոր կողմերից հաւասար հեռաւորութեան վերայ է գտնվում, ապա այն շրջանը որ գծած է մի և նոյն կենդրոնի շուրջ ապոթեմային հաւասար շառաւիղով, կը շօշափի բազմանկիւնու բոլոր կողմերը և այդ պատճառաւ կը լինի ներսը գծած շրջան։

Հէնց այդ պատճառաւ ապոթեման երբեմն անուանվում է ներսը գծած շրջանի շառաւիղ։

§ 107. Տեօրեմայ։ Շրջանի դուրսը-գծած հաւասարանկիւն բազմանկիւնին միշտ հաւասարակողմ կը լինի, այսինքն կանոնաւոր կը լինի։



Նկար 151.

Դիցուք թէ ABCDEF (Նկր. 151) դուրսը գծած հաւասարանկիւն բազմանկիւնի է. A=B=C... հարկաւոր է ապացուցանել, որ

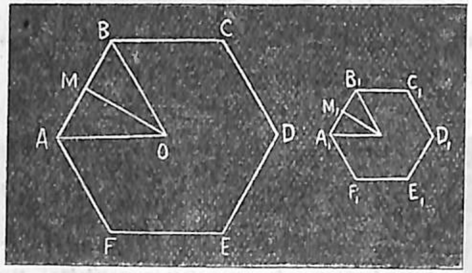
AB=BC=CD...

Ապաց. O կենդրոնը միացնելով բազմանկիւնու գագաթների հետ և անց կացնելով OM և ON շառաւիղները դէպի շօշափող M և N կէտերը, կը ստանանք որ MOB և NOB ուղղանկիւն եռանկիւնները, ունենալով մի ընդհանուր OB ներքնագիծ, իսկ ON և OM հաւասար էջեր, հաւասար են միմեանց (§ 25)։ Ուրեմն $\angle MBO = \angle NBO$, այսինքն այն գիծը, որ միացնում է կենդրոնը մի որ և իցէ անկեան գագաթի հետ, բաժանում է այդ անկիւնը երկու հաւասար մասնի։ Այդ պատճառաւ AOB և BOC եռանկիւնիները, ունենալով մի ընդհանուր կողմ OB և ինչպէս ապացուցեցինք $\angle ABO=\angle CBO$ և բացի այդ $\angle BAO=\angle BCO$, ինչպէս հաւասար անկեանց հաւասար կէսեր, հաւասար են և այդ պատճառաւ $AB=BC$։

Սոյն ձևով ապացուցվում է և միւս կողմերի հաւասարութիւնը։

§ *108*. Տեօրեմայ։ Կանոնաւոր համանուն բազմանկիւնիների շրջագծերը յարաբերում են միմեանց, որպէս դուրսը գծած կամ ներսը գծած շրջանների շառաւիղները։

Ապաց. Թող ABCDEF և $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ (Նկր. *152*) երկու համանուն կանոնաւոր բազմանկիւնիներ լինեն, O և O_1 նոցա կենդրոնները։ O կէտը միացնենք A և B կէտերի հետ և O կէտից ցած թողնենք OM ուղղահայեացը դէպի AB կողմը։



Նկար *152*.

Յետոյ, O_1 կէտը միացնենք A_1 և B_1 կէտերի հետ և O_1 կէտից ցած թողնենք O_1M_1 ուղղահայեացը դէպի A_1B_1 կողմն։ OBA և $O_1B_1A_1$ եռանկիւնիները, որոնց մէջ OBA և OAB անկիւնները հաւասար են համապատասխանաբար $O_1B_1A_1$ և $O_1A_1B_1$ անկիւններին (§ *105*) նման են, ուրեմն $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$, բայց որովհետև նման բազմանկեանց շրջագծերը յարաբերում են մի-

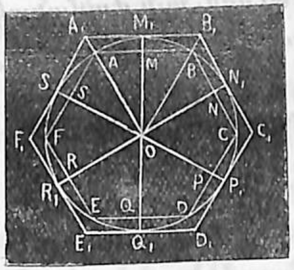
մեանց, որպէս նոցա կողմերը (§ *104* հետև. 4), ապա

$$\frac{AB+BC+CD+\cdots}{A_1B_1+B_1C_1+C_1D_1+\cdots}=\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{OA}{O_1A_1}=\frac{OM}{O_1M_1}$$

Սորանից հետևում է, որ երկու համանուն կանոնաւոր բազմանկիւնների շրջագծերը, որոնցից մինը ներսը--գծած է, իսկ միւսը դուրսը-գծած, յարաբերում են միմեանց։ Ինչպէս ապոթեման ներսը-գծած բազմանկիւնու շրջանի շառաւիղին։

§ *109*. Խնդիր։ Տուած ներսը-գծած կանոնաւոր բազմանկիւնու կողմի օգնութեամբ գտնել համանուն դուրսը-գծած բազմանկիւնու կողմը։

Լուծումն։ Թող ABCDEF (Նկր. *153*) կանոնաւոր ներսը գծած բազմանկիւնի լինի։ Ցած թողնելով կենդրոնից դէպի բազմանկիւնու կողմերը ուղղահայեացներ և շարունակելով մինչև շրջանի հետ հատուելը, անց կացնենք M_1, N_1, P_1... հատման կէտերից շօշափող գծեր, այդպիսով կը կազմուի $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ դուրսը-գծած բազմանկիւնին, որի անկիւնները հաւասար են ներսը-գծած բազմանկիւնու անկիւններին, որովհետև նոցա կողմերը փոխադարձաբար զուգահեռական են, այդ պատճառաւ դուրսը-գծած բազմանկիւնին (§ *107*) կանոնաւոր կը լինի։ Կը տեսնենք որ A_1 և A երկու համապատասխան անկիւնների գագաթները և O կենդրոնը



Նկար *153*.

գտնվում են մի ուղիղ գծի վերայ, որովհետև A_1S_1O A_1M_1O միմեանց հաւասար ուղղանկիւն եռանկիւնիներից հետևում է, որ OA_1 գիծը S_1OM_1 անկիւնը բաժանում է երկու հաւասար կէսի, իսկ ASO և AMO ուղղանկիւն եռանկիւնների հաւասարութիւնից հետևում է, որ OA գիծը բաժանում է միևնոյն անկիւնը երկու հաւասար կէսի, ուրեմն OA_1 և OA գծերը միաւորվում են։

AOB և A_1OB_1 նման եռանկիւններից կը գտնենք (§ 54 հետ.)

$$\frac{A_1B_1}{A\;B}=\frac{OM_1}{O\;M},$$

իսկ OMA ուղղանկիւն եռանկիւնից

$$OM=\sqrt{OA^2-AM^2}$$

Բայց որովհետև $AM=\frac{AB}{2}$, ապա $OM=\sqrt{OA^2-\frac{AB^2}{4}}$

Այս արտայայտութիւնը դնելով նախընթաց հաւասարութեան մէջ, կը ստանանք

$$\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{OM_1}{\sqrt{OA^2-\frac{AB^2}{4}}}$$

ABCDEF բազմանկիւնու կողմերի թիւը թող լինի n, իսկ a_n —նորա մի կողմն, b_n —դուրսը-գծած բազմանկիւնու մի կողմը և r — շրջանի շառաւիղը, այն ժամանակ նախընթաց յարաբերութիւնը այսպիսի ձև կը ստանայ

$$\frac{b_n}{a_n}=\frac{r}{\sqrt{r^2-\frac{a_n{}^2}{4}}}$$ որտեղից կը գտնենք

$$b_n=\frac{a_n r}{\sqrt{r^2-\frac{a_n{}^2}{4}}}$$

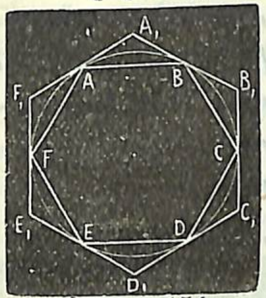
Այս հաւասարութեան օգնութեամբ կարելի է գըտնել դուրսը-գծած բազմանկիւնու կողմը, եթէ տուած է համանուն ներսը-գծած բազմանկիւնու կողմը։

Եթէ նախընթաց հաւասարութեան երկու մասերը բարձրացնենք երկրորդ աստիճանի և գտնենք a_n, ապա կը ստանանք

$$a_n=\frac{b_n\cdot r}{\sqrt{r^2+\frac{b_n{}^2}{4}}}$$

Այս հաւասարութեան օգնութեամբ, տուած դուրսը-գծած բազմանկիւնու կողմով կարելի է գտնել համանուն ներսը-գծած բազմանկիւնու կողմը։

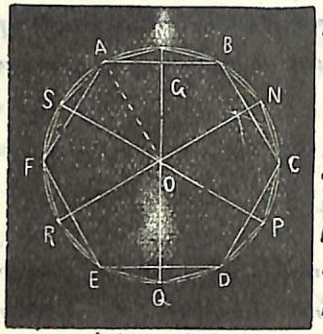
Որպէս զի դուրսը գծենք մի բազմանկիւնի, որ լինի համանուն ABCDEF ներսը գծած բազմանկիւնու հետ (նկր. 154) կարելի է. A,B,C... գագաթներից անց կացնել շօշափող գծեր։ Այս ձևով կազմուած $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ բազմանկիւնին կը լինի հաւասարանկիւն, որովհետև նորա բոլոր անկիւնները չափվում են միմեանց հաւասար աղեղներով (§ 88), ուրեմն այս բազմանկիւնին կանոնաւոր է (§ 107)։



Նկար. 154.

§ 110. Խնդիր։ Կրկնապատկել կանոնաւոր ներսը-գծած բազմանկիւնու կողմերը։

Լուծումն։ Թող ABCDEF (նկր. 155) լինի կանոնաւոր ներսը—գծած բազմանկիւնի։ Ցած թողենք ուղղահայեացներ կենդրոնից դէպի նորա կողմերը և շարունակենք մինչև նոցա հանդիպելը շրջապատին։ M, N, P, Q... հանդիպման կէտերը միացնենք A, B, C, D... կէտերի հետ, այս ձևով կազմուած AMBN...



Նկար 155.

բազմանկիւնին ունի երկու անգամ աւելի կողմը, քան թէ ABCDEF բազմանկիւնին, բայց որովհետև AB, BC, CD.. աղեղները M, N, P... կէտերումը բաժանվում են երկու հաւասար մասների և AM=MB=BN..., այդ պատճառաւ այս բազմանկիւնին հաւասարակողմն է, ուրեմն § 105 հետև. 4 հիման վերայ, կանոնաւոր է։

Ի հարկէ կողմերի թիւը կրկնապատկելու ժամանակ բազմանկեան շրջագիծը աւելի ընդարձակւում է։

Միացնելով կենդրոնը A գագաթի հետ, կը գտնենք OAM եռանկիւնուց (§ 64), որ

$$AM^2=OA^2+OM^2-2OM\cdot OG$$

բայց OAG ուղղանկիւն եռանկիւնուց ունինք

$$OG=\sqrt{OA^2-AG^2}=\sqrt{OA^2-\frac{AB^2}{4}}$$

Այս արտայայտութիւնը դնելով նախընթաց հաւասարութեան մէջ և նկատելով, որ OA=OM կը գտնենք։

$$AM^2=2OM^2-2OM\sqrt{OM^2-\frac{AB^2}{4}}$$

ABCDEF բազմանկիւնու կողմերի թիւը թող լինի n, նորա մի կողմը—a_n, AMBNC... բազմանկիւնու մի կողմը—a_{2n}, իսկ շրջանի շառաւիղը—r, այն ժամանակ նախընթաց հաւասարութիւնը կը ստանայ այսպիսի ձև

$$a_{2n}^2=2r^2-2r\sqrt{r^2-\frac{a_n^2}{4}}$$

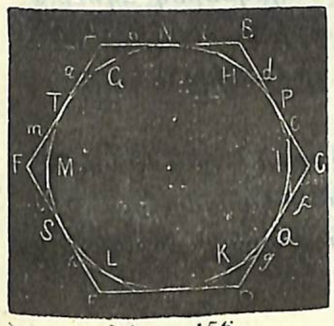
...

Այս հաւասարութեան օգնութեամբ կարելի է n կողմեանի ներսը-գծած բազմանկիւնու տուած մի կողմով գտնել նոյնպէս ներսը-գծած 2n կողմանի բազմանկիւնու մի կողմը։

Այս հաւասարութիւնը վճռելով մի քանի անգամ իրար ետևից, կը ստանանք հետևապէս 2n, 4n, 8n.., կողմանի բազմանկիւնիների կողմերը։ Իսկ § 109 հաւասարութեան օգնութեամբ կարելի է գտնել համապատասխան դուրսը-գծած բազմանկիւնիների կողմերը։

§ 111. Խնդիր։ Կանոնաւոր դուրսը-գծած բազմանկիւնու կողմերը կրկնապատկել։

Լուծումն։ Թող ABCDEF (նկր. 156) կանոնաւոր դուրսը-գծած բազմանկիւնի լինի, TN, NP, PQ... աղեղները բաժանելով երկու հաւասար մասերի և անց կացնելով նոցա G.H.I. միջակէտերին շօշափող գծեր, կը կազմենք դուրսը-գծած a b c d e f... բազմանկիւնին, որի կողմերի թիւը երկու անգամ աւելի է ABCDEF բազմանկիւնու կողմերի թուից, և որովհետև այս բազմանկիւնու անկիւնները չափվում են միմեանց հաւասար աղեղներով, ուրեմն բազմանկիւնին հաւասարանկիւն է։

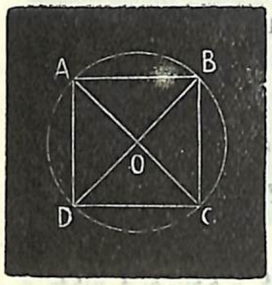


Նկար 156.

Ի հարկէ, կողմերը կրկնապատկելու ժամանակ, դուրսը-գծած բազմանկիւնու շրջագիծը փոքրանում է։

112. Գտնել ներսը—գծած քառակուսու մի կողմը։

Լուծումն։ Թող ABCD (նկր. 157) ներսը - գծած քառակուսի լինի և r շրջանի շառավիղը, անց կացնելով AC և DB տրամագծերը և նկատելով, որ նոքա փոխադարձ ուղղահայեաց են և բաժանում են միմեանց երկու հաւասար կէսի, (§ 45) եզրակացնում ենք, որ նոցա հանդիպման կէտը ընկնում է կենդրոնի վերայ և AOB ուղիղ անկիւն է։ Ուրեմն $AB^2=AO^2+OB^2=2r^2$ և այդ պատճառաւ $AB=r\sqrt{2}$։



Նկար. 157.

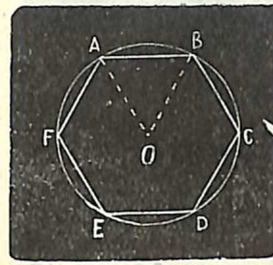
Ակներև է, որ եթէ AC և DB երկու միմեանց ուղղահայեաց տրամագծեր անց կացնենք և միացնենք նոցա ծայրերը ուղիղ գծերով, ապա այդ ձևով առացած ABCD քառանկիւնին քառակուսի կը լինի, որովհետև նորա կողմերը որպէս հաւասար աղեղներով ձգուած լարեր՝ հաւասար են միմեանց և իւրաքանչիւր անկիւնը ձգուելով տրամագծով, ուղիղ անկիւն է։

Գիտենալով ներսը—գծած քառակուսու մի կողմն, կարելի է § 110 օգնութեամբ գտնել կանոնաւոր ներսը—գծած ութանկիւնու, տասնուվեցանկիւնու և այլն կողմերը։

§ 113. Խնդիր։ Գտնել կանոնաւոր ներսը—գծած վեցանկիւնու մի կողմն։

Լուծումն։ Թող ABCDEF (նկր. 158) կանոնաւոր ներսը—գծած վեցանկիւնի լինի, միացնելով O կենդրոնը

A և B կէտերի հետ, կը նկատենք որ $\angle AOB=\frac{360^0}{6}=60^0$, ուրեմն BAO և ABO երկու անկիւնների գումարը հաւասար է $180^0-60^0=120^0$, բայց, որովհետև OA և OB կողմերի հաւասարութեան պատճառաւ, այս անկիւնները հաւասար են միմեանց, ապա իւրաքանչիւրը նոցանից հաւասար է $\frac{120^0}{2}=60^0$. սորանից հետևում է, որ AOB հաւասարակողմն եռանկիւնի է և որ կանոնաւոր ներսը—գծած վեցանկիւնու կողմն հաւասար է շառաւիղին։



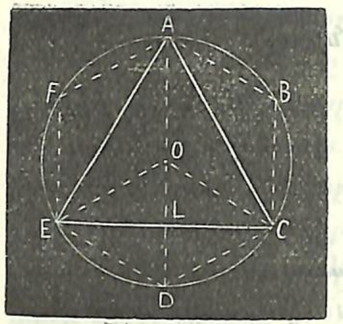
Նկար 158.

Այս ասածներից եզրակացնում ենք, որ շառաւիղին հաւասար լարը ձգվում է 60^0 աղեղով, և թէ՝ իւրաքանչիւր շրջապատի մէջ իւր շառաւիղը պարունակվում է 6 անգամ։

Գտնելով կանոնաւոր ներսը—գծած վեցանկիւնու մի կողմն, § 110 օգնութեամբ կարելի է հետևեալս գտնել ներսը—գծած կանոնաւոր տասներկուանկիւնու, 24-անկիւնու և այլն....մի կողմն։

114. Գտնել կանոնաւոր ներսը—գծած եռանկիւնու մի կողմն։

Լուծումն։ Թող ABCDEF (նկր. 159) կանոնաւոր ներսը—գծած վեցանկիւնի լինի, իսկ r շրջանի շառաւիղը, անց կացնելով AC, CE և EA անկիւնագծերը կը



Նկար 159.

կազմենք ACE կանոնաւոր ներսը—գծած եռանկիւնի։

Սորա կողմն որոշելու համար անց կացնենք OE և OC շառաւիղները և AD տրամագիծը։ EOCD քառանկիւնին, որի բոլոր կողմերը իբրև շառաւիղներ հաւասար են միմեանց՝ շեղանկիւն է և այդ պատճառաւ (§ 68) կը ստանանք

$$EC^2+OD^2=OE^2+OC^2+CD^2+ED^2 \text{ կամ}$$
$$EC^2+r^2=4r^2$$

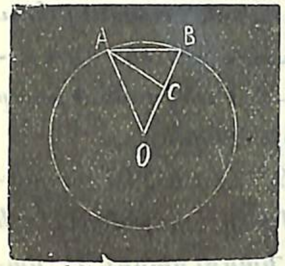
որանից $EC^2=3r^2$ և $EC=r\sqrt{3}$.

և որովհետև շեղանկեան անկիւնագծերը փոխադարձ ուղղահայեաց են և բաժանում են միմեանց երկու հաւասար մասերի, ապա $OL=\frac{OD}{2}=\frac{r}{2}$ և այդ պատճառաւ ներսը—գծած եռանկիւնու AL բարձրութիւնը կը լինի

$$AL=AO+OL=r+\frac{r}{2}=\frac{3r}{2}:$$

§ *115*. Խնդիր։ Գտնել կանոնաւոր ներսը—գծած *10*-անկիւնու մի կողմն։

Լուծումն։ Թող AB (նկր. *160*) կանոնաւոր ներսը—գծած տասնանկիւնու մի կողմն լինի. միացնենք O կենդրոնը A և B կէտերի հետ և նկատենք, որ $\angle AOB=\frac{360}{10}=36^0$. BAO և ABO երկու անկիւնների գումարը հաւասար է $180^0-36^0=144^0$. բայց որովհետև այդ



Նկար 160.

անկիւնները հաւասար են միմեանց, ապա իւրաքանչիւրը նոցանից հաւասար է $\frac{144^0}{2}=72^0$։ Իսկ եթէ AC գծով BAO անկիւնը բաժանենք երկու հաւասար մասը, ապա $\angle OAC=\angle AOC=36^0$ և այդ պատճառաւ OC=AC։ Որովհետև ABC եռանկիւնու մէջ մի անկիւնը հաւասար է 36^0, իսկ միւսը 72^0, ապա երրորդ C անկիւնը հաւասար է 72^0, ուրեմն $\angle ACB=\angle ABC=72^0$ և այդ պատճառաւ AB=AC=OC։ Իսկ այժմ նկատելով, որ AC գիծը OAB անկիւնը բաժանում է երկու հաւասար մասը, կը գտնենք (§ 63) $\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CB}$. կամ թէ AB գծի փոխարէն վերցնելով OC գիծը, կը ստանանք $\frac{OA}{OC}=\frac{OC}{CB}$, բայց OC հաւասար է ներսը—գծած տասնանկիւնու AB կողմին, ուրեմն կանոնաւոր ներսը—գծած 10-անկիւն բազմանկիւնու մի կողմը հաւասար է մեծ մասին շառաւիղի, որ բաժանուած է ներքին եւ արտաքին յարաբերութեամբ։

Եթէ շրջանի շառաւիղը նշանակենք r, իսկ ներսը—գծած տասնանկիւնու մի կողմն — a, ապա $\frac{r}{a}=\frac{a}{r-a}$ վերցնենք ներքին և արտաքին անդամների արտադրեալը, կը գտնենք

$$a^2=r^2-ar \text{ կամ } a^2+ar=r^2 \text{ և այստեղից}$$
$$a=-\frac{r}{2}+\sqrt{r^2+\frac{r^2}{4}}=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{5r^2}{2}}=r\frac{\sqrt{5}-1}{2},$$

Գտնելով կանոնաւոր ներսը—գծած 10-անկիւնու մի կողմ, կարելի է § 110 հաւասարութեան օգնութեամբ որոշել հետեւաբար ներսը—գծած կանոնաւոր 20-անկիւնու, 40-անկիւնու և այլն կողմերը։

Նկատողութիւն։ §§ 110, 113, 114 և 115 առածների հիման վերայ եզրակացնում ենք, որ քանոնի և կարկինի օգնութեամբ կարելի է կառուցանել 1) կանոնաւոր ներսը—գծած քառակուսի, ուրեմն և 8, 16... անկիւնները բազմանկիւն 2) կանոնաւոր ներսը-գծած եռանկիւնի և վեցանկիւնի, ուրեմն 12, 24... անկիւն բազմանկիւններ, 3) կանոնաւոր ներսը—գծած 10-անկիւնի, ուրեմն և 20, 40... անկիւն բազմանկիւններ։ Կարելի է նոյնպէս, կառուցանել կանոնաւոր ներսը—գծած 15-անկիւնի, ուրեմն և 30, 60 անկիւն բազմանկիւններ։

Հաուսը ցոյց տուեց կարկինի և քանոնի օգնութեամբ, կանոնաւոր ներսը—գծած 17-անկիւնանու կառուցման կարելիութիւնը և առհասարակ բոլոր կանոնաւոր 2^n+1 անկիւն բազմանկիւնու, եթէ 2^n+1 պարզ թիւ է։

ԳԼՈՒԽ VIII

ՄԱԿԱՐԴԱԿՆԵՐԻ ՉԱՓՈՒՄՆ։

Ուղղաձիգ ձեւերի մակարդակների չափումն։

§ 116. Հարթ մակերեւոյթի մի մասն ամփոփված որ և իցէ ձևով անուանվում է այդ ձևի Մակարդակը։ Մակարդակը չափել կը նշանակէ համեմատել նորան մի ուրիշ մակարդակի հետ, որ ընդունված է իբրև միաւոր։ Իբրև մակարդակների միաւոր ընդունում են քառակուսու մակարդակը, որի մի կողմն հաւասար է միաւորին, և այդ մակարդակը անուանվում է քառակուսային միաւոր։ Այս պատճառաւ մի որ և իցէ ձևի մակարդակը չափել, կը նշանակէ գտնել յարաբերութիւնը այդ մակարդակի քառակուսային միաւորի։

Երկու ձևեր ունենալով հաւասար մակարդակներ՝ անուանվում են հաւասարամեծ ձևեր։

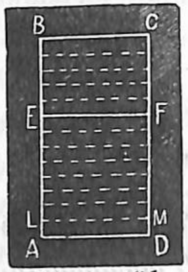
Ուղղագիծ ձևերի մակարդակների որոշումն հիմնուած է հետևեալ առաջարկութեան վերայ։

§ 117. Տեորեմայ։ Հաւասար հիմք ունեցող երկու ուղղանկիւնիների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, որպես նոցա բարձրութիւնները։

Դիցուք թէ ABCD և AEFD (նկր. 161) երկու ուղղանկիւնիք են, որք ունեն մի ընդհանուր հիմք AD, հարկաւոր է ապացուցանել որ $\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE}$:

Ապաց. Ակնածենք երկու դէպք:

1 Դէպք: Դիցուք թէ AB և AE բարձրութիւնները համաչափ են և նոցա AL ընդհանուր չափը m անգամ պարունակվում է AB կողմի մէջ և n անգամ AE կողմի մէջ, այնպէս որ $\frac{AB}{AE}=\frac{m}{n}$:

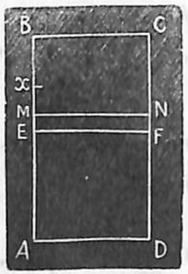


Նկար 161.

Եթէ AB կողմի բաժանման բոլոր կէտերից անց կացնենք AD կողմին զուգահեռական գծեր, ապա ABCD ուղղանկիւնին կը բաժանվի m հաւասար ուղղանկիւնի. իսկ AEFD—n հաւասար ուղղանկիւնի. ուրեմն $\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{m}{n}$ և այդ պատճառաւ

$$\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE}:$$

2. Դէպք. Դիցուք թէ AB և AE (նկր. 162) բարձրութիւնները անհամաչափ են: Այս դէպքում $\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE}$ յարաբերութեան ճշմարտութիւնը կարելի է արտայայտել, ապացուցանելով՝ որ $\frac{ABCD}{AEFD}$ համեմատութիւնը չէ կարող ոչ մեծ լինել, ոչ փոքր լինել $\frac{AB}{AE}$ համեմատութիւնից: Արդարև՝ թող $\frac{ABCD}{AEFD}<\frac{AB}{AE}$, AE փոխարէն վերցնենք նորանից աւելի



Նկար 162.

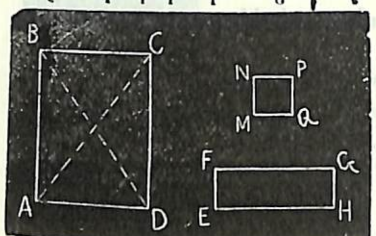
մեծ Ax գիծը այնպէս որ $\frac{ABCD}{AMFD}=\frac{AB}{Ax}$.
AB գիծը բաժանելով այնպիսի հաւասար մասների, որ իւրաքանչիւրը նոցանից լինի աւելի փոքր քան Ex, կը գտնենք, որ բաժանող կէտերից գոնէ մինը կ՚ընկնի E և x կէտերի մէջ, թող այդ կէտը լինի M կէտը. Եթէ անց կացնենք MN գիծը AD գծին զուգահեռական և նկատենք, որ AB և AM գծերը համաչափ են, ապա ինչպէս առաջ, կը ստանանք $\frac{ABCD}{AMND}=\frac{AB}{AM}$. բաժանելով այս յարաբերութիւնը վերոյիշեալ յարաբերութեան վերայ, կը ստանանք $\frac{AEFD}{AMND}=\frac{Ax}{AM}$. բայց այս հաւասարութիւնը սխալ է, որովհետև
$\frac{AEFD}{AMND}<1$, իսկ $\frac{Ax}{AM}>1$. սորանից հետևում է որ միևնոյն է, ենթադրած $\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{Ax}$, կամ թէ $\frac{ABCD}{AEFD}<\frac{AB}{AE}$ տանում է մեզ սխալ եզրակացութեան;

Նոյն ձևով կարելի է ապացուցանել, որ $\frac{ABCD}{AEFD}$ չէ կարող և մեծ լինել $\frac{AB}{AE}$ համեմատութիւնից: Այս ապացուցանելու համար հարկաւոր է միայն AE գծի փոխարէն վերցնել նրանից աւելի փոքր գիծ և նախընթաց դատողութիւնները կրկնել:

Այսպէս ուրեմն լինեն բարձրութիւնները համաչափ թէ անհամաչափ, միևնոյն է, մենք կունենանք միշտ $\frac{ABCD}{AEFD}=\frac{AB}{AE}$ յարաբերութիւնը:

Որովհետև ուղղանկիւնու ամէն մի կողմը կարելի է ընդունել իբրև նորա բարձրութիւն, իսկ դորա ուղղահայեաց կողմն—իբրև հիմք, ապա վերոյիշեալ առաջարկութիւնից հետևում է որ հաւասար բարձրութիւններ ունեցող ուղղանկիւնների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, որպէս նոցա հիմքերը։

§ 118 Տեորեմա։ Ուղղանկիւնու մակարդակը հաւասար է բարձրութեանը՝ բազմապատկած հիմքի վերայ։



Նկար. 201.

Թող ABCD (Նկր, 163) մի որ և իցէ ուղղանկիւնի լինի, որի AD հիմքը նշանադրենք b, իսկ AB բարձրութիւնը h։ և MNPQ—քառակուսի, որի մի կողմն հաւասար է միաւորին. հարկաւոր է ապացուցանել, որ

$$\frac{ABCD}{MNPQ}=b\cdot h։$$

Ապաց. Երևակայենք EFGH ուղղանկիւնին, որի EH հիմքը հաւասար է ABCD ուղղանկիւնու AD հիմքին, իսկ EF բարձրութիւնը հաւասար է MNPQ քառակուսու մի կողմին, այն ժամանակ նախընթաց § հիման վերայ կունենանք

$$\frac{ABCD}{EFGH}=\frac{AB}{EF} \text{ և } \frac{EFGH}{MNPQ}=\frac{EH}{MN}$$

Բազմապատկելով այդ յարաբերութիւնները միմեանց վերայ, կը ստանանք

$$\frac{ABCD}{MNPQ}=\frac{AB\cdot EH}{EF\cdot MN}$$

Բայց AB=h, EH=b, EF=MN=1, ուրեմն

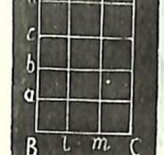
$$\frac{ABCD}{MNPQ}=b\cdot h։$$

Որովհետև մակերևոյթները չափելու ժամանակ MNPQ ընդունում ենք իբրև միաւոր, ապա

$$ABCD=b\cdot h.$$

Այդ կը նշանակէ, որ ուղղանկիւնու մակարդակի մէջ գտնուած քառակուսային միաւորների թիւը հաւասար է հիմքին՝ բազմապատկած բարձրութեան վերայ, ենթադրելով, որ բարձրութիւնը և հիմքը արտայայտուած են գծային միաւորներով, որոնք հաւասար են քառակուսային միաւորի կողմին։ Այս աւելի կարճ ձևով այսպէս կարելի է ասել. ուղղանկիւնու մակարդակը հաւասար է հիմքի և բարձրութեան արտադրեալին։

Դիցուք թէ ABCD (Նկր. 164) ուղղանկիւնու բարձրութիւնը հաւասար է 5 դիւյմին, որոնք ներկայացրած են Ba, ab, bc, cd, dA մասներով, իսկ նորա հիմքը-3 դիւյմին, որոնք ներկայացրած են Bl, lm, mC մասներով. ապա ABCD



Նկար 164.

ուղղանկիւնու մակարդակը հաւասար է 3.5 քառակուսի դիւյմին=15 □ դ։ Դժուար չէ համոզվել այս եզրակացութեան ճշմարտութեան մէջ, անցկացնելով a, b, c և d կէտերից BC կողմին զուգահեռական գծեր, իսկ l և m կէտերից – զուգահեռականներ CD կողմին, այդպիսով ուղղանկիւնին կը բաժանուի 15 հաւասար քառակուսիների, որոնցից իւրաքանչիւրը հաւասար կը լինի մի քառակուսի դիւյմին։

Ակներև է որ այն քառակուսու մակարդակը, որի կողմն a է, հաւասար է a·a կամ a^2, հէնց այս պատ-

ճառաւ մի որ և իցէ քանակութեան երկրորդ աստիճանը քառակուսի են անուանում։

Այս ասածներից հետևում է, որ եթէ երկու գծային միաւորների համեմատութիւնը m *է, ապա մի և նոյն քառակուսի միաւորների համեմատութիւնը կլինի* m^2*։ Այսպէս օրինակի համար երկու գծային միաւորների սաժենի և արշինի համեմատութիւնը 3 է, իսկ քառակուսի սաժենի և քառակուսի արշինի համեմատութիւնը կը լինի* 3^2*. այսինքն 9։*

§ *119.* Տեօրեմայ։ Իւրաքանչիւր զուգահեռակողմի մակարդակը հաւասար է բարձրութեանը՝ բազմապատկած հիմքի վերայ։

Թող ABCD *(նկր. 165) լինի զուգահեռակողմ, որի* AD *հիմքը նշանադրենք* b, *իսկ բարձրութիւնը* h. *հարկաւոր է ապացուցանել, որ* ABCD *զուգահեռակողմի մակարդակը հաւասար է* b. h։

Նկար 165.

Ապաց. Եթէ A *և* D *կէտերում կանգնեցնենք ուղղահայեացներ* AD *կողմին և հանդիպակաց* BC *կողմն շարունակենք մինչև ուղղահայեացի հետ հանդիպելը, ապա կը կազմվի* ANMD *ուղղանկիւնին, որ* ABCD *զուգահեռակողմի հետ ունի մի ընդհանուր հիմք և հաւասար բարձրութիւն, նախընթաց § հիման վերայ* ANMD=b·h. *բայց* ANB *և* DMC *ուղղանկիւն եռանկիւնները հաւասար են, որովհետև* AN *և* AB *կողմերը հաւասար են համապատասխանաբար* DM *և* DC *կողմերին իբրև զուգահեռականներ զուգահեռականների մէջ (§ 37). իսկ եթէ այս եռանկիւններից*

իւրաքանչիւրին աւելացնենք ABMD *մակարդակը, ապա կը ստանանք, որ* ABCD *զուգահեռակողմը հաւասարամեծ է* ANMD *ուղղանկիւնուն. ուրեմն*

$$ABCD = b.\,h$$

Այս առաջարկութիւնից հետևում է.

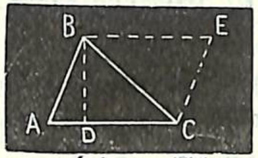
1) Երկու զուգահերակողմերի մակարդակները յարաբերում են միմեանց, ինչպէս նոցա հիմքի և բարձրութեան արտադրեալները։

2) Երկու հաւասարահիմք զուգահեռակողմերի մակարդակները յարաբերում են միմեանց, ինչպէս նոցա բարձրութիւնները։

3) Երկու հաւասար բարձրութիւն ունեցող զուգահեռակողմերի մակարդակները յարաբերում են միմեանց, ինչպէս նոցա հիմքերը։

4) Երկու հաւասար հիմք և հաւասար բարձրութիւն ունեցող զուգահեռակողմերը հաւասարամեծ են միմեանց։

§ *120.* Տեօրեմայ։ Եռանկիւնու մակարդակը հաւասար է նորա բարձրութեան եւ հիմքի արտադրեալի կիսին։



Նկար 166.

Թող ABC *(նկր. 166) մի որ և իցէ եռանկիւնի լինի, որի* AC *հիմքը նշանադրենք* b, *իսկ* BD *բարձրութիւնը* h. *հարկաւոր է ապացուցել, որ*

$$ABC = \frac{b\cdot h}{2},$$

Ապաց. Եթէ C *կէտից անցկացնենք* CE *զուգահեռական* AB *կողմին և* B *կէտից—*BE *զուգահեռական* AC *կողմին, ապա կը կազմվի* ABEC *զուգահեռակողմը, որի մակարդակը § 119 հիման վերայ հաւասար է* b·h.

բայց որովհետև ABC *եռանկիւնին* ABEC *զուգահեռակողմի կէսն է կազմում, ապա* $ABC=\frac{b\cdot h}{2}$

Այս առաջարկութիւնից հետևում է.

1) Եռանկիւնին այն զուգահեռագծի կիսին է հաւասար, որ ունի նորան հաւասար հիմք և բարձրութիւն։

2) Երկու եռանկիւնիների մակարդակները այնպէս են յարաբերում, որպէս նոցա բարձրութեան և հիմքի արտադրեալները։

3) Երկու հաւասարահիմք եռանկիւնիների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, որպէս նոցա բարձրութիւնները։

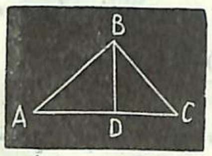
4) Երկու հաւասարաբարձր եռանկիւնիների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, որպէս նոցա հիմքերը։

5) Երկու հաւասարաբարձր և հաւասարահիմք եռանկիւնիները հաւասարամեծ են։

6) Ուղղանկիւն եռանկիւնու մակարդակը հաւասար է նորա էջերի արտադրեալի կիսին։

§ 121. Խնդիր. Եռանկիւնու երեք կողմերի օգնութեամբ որոշել նորա մակարդակը։

Լուծումն. Թող ABC *լինի մի որևիցէ եռանկիւնի (Նկր. 167). Նորա մակարդակը նշանադրենք* $\triangle$ *և դիցուք* $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. *անց կացընելով* BD *բարձրութիւնը։* ABD *ուղղանկիւն եռանկիւնուց կը գտնենք, որ*



Նկար. 167

$$BD^2=AB^2-AD^2=c^2-AD^2$$

իսկ ABC *եռանկիւնուց (§ 66)*

$$a^2=b^2+c^2-2b.\ AD \text{ կամ } AD=\frac{b^2+c^2-a^2}{2b}.$$

ուրեմն

$$BD^2=c^2-\frac{(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}=\frac{4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2}{4b^2}$$

Երկրորդ աստիճանների տարբերութիւնը փոխադրելով գումարի և տարբերութեան արտադրեալով, կը ստանանք

$$BD^2=\frac{[2bc+(b^2+c^2-a^2)]\,[2bc-(b^2+c^2-a^2)]}{4b^2};$$

Նկատում ենք, որ

$$2bc+(b^2+c^2-a^2)=2bc+b^2+c^2-a^2=(b+c)^2-a^2$$
$$=(b+c+a)\,(b+c-a)$$
$$2bc-(b^2+c^2-a^2)=2bc-b^2-c^2+a^2=a^2-(b^2+c^2-2bc)$$
$$a^2-(b-c)^2=(a+b-c)\,(a+c-b)$$

կը գտնենք

$$BD^2=\frac{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}{4b^2}$$

և սորանից.

$$BD=\frac{\sqrt{(a+b+c)\,(b+c-a)\,(a+c-b)\,(a+b-c)}}{2b}$$

որոշելով եռանկիւնու BD *բարձրութիւնը, կը գտնենք*

$$\triangle=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c)}\text{։}$$

Այս հաւասարութեան օգնութեամբ որոշում են եռանկիւնու մակարդակը, երբ յայտնի են նորա երեք կողմերը։

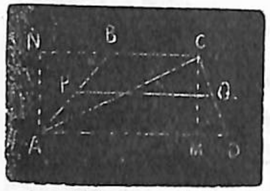
Այս հաւասարութիւնը կարելի է ներկայացնել ուրիշ ձևով, նշանադրելով եռանկիւնու շրջագիծը $2p$. *այսինքն ենթադրելով որ* $a+b+c=2p$, *այն ժամանակ.*

$$b+c-a=a+b+c-2a=2p-2a=2(p-a)$$
$$a+c-b=a+b+c-2b=2p-2b=2(p-b)$$
$$a+b-c=a+b+c-2c=2p-2c=2(p-c)$$

գնելով նախընթաց եռանկիւնու մակարդակը արտայայտող հաւասարութեան մէջ, կը ստանանք

$$\triangle=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}:$$

§ *122.* Տեօրեմայ։ Սեղանանմանի մակարդակը հաւասար է զուգահեռական կողմերի կիսագումարին՝ բազմապատկած բարձրութեան վերայ։



Նկար. 168

Թող ABCD *(Նկր. 168) լինի մի որ և իցէ սեղանանման և* CM *նորա բարձրութիւնը. հարկաւոր է ապացուցանել, որ* ABCD *սեղաննամանի մակարդակը հաւասար է* $\frac{(AD+BC)CM}{2}$:

Ապաց. Անց կացնելով AC *անկիւնագիծը և բարձրացնելով* A *կէտից* AN *ուղղահայեացը դէպի* CB *կողմի շարունակութիւնը, կը ստանանք (§ 120)։*

$$\triangle ACD=\frac{AD\cdot CM}{2} \text{ և } \triangle ABC=\frac{BC\cdot AN}{2}.$$

գումարելով այս հաւասարութիւնները և նկատելով, որ

$$AN=CM \text{ և } \triangle ACD+\triangle ABC=ABCD, \text{ կը գտնենք}$$

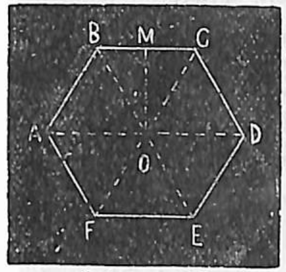
$$ABCD=\frac{AD.CM}{2}+\frac{BC.AN}{2}=\frac{(AD+BC).CM}{2}:$$

Եթէ PQ *գծով միացնենք* AB *և* CD *անզուգահեռական կողմերի միջակէտերը, ապա կը ստանանք* $PQ=\frac{AD+BC}{2}$ *(§ 46) ուրեմն*

$$ABCD=PQ.CM$$

այսինքն սեղանանմանի մակարդակը հաւասար է միջագծին՝ բազմապատկած բարձրութեան վերայ։

§ *123.* Տեօրեմայ։ Կանոնաւոր բազմանկիւնու մակարդակը հաւասար է իւր շրջագծի բազմապատկած ապաթեմայի կիսի վերայ։



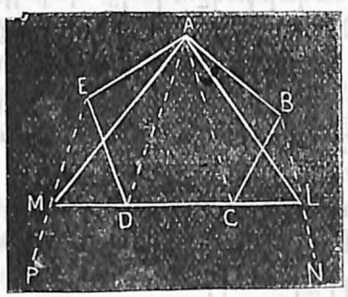
Նկար 169.

Թող ABCDEF *(Նկր. 119) կանոնաւոր* n*—անկիւնի բազմանկիւնի լինի,* O*—նորա կենդրոնը և* OM*—ապաթեմայ։ Հարկաւոր է ապացուցանել, որ բազմանկիւնու մակարդակը հաւասար է* $n\cdot BC.\frac{OM}{2}$:

Ապաց. Միացնելով O *կէտը* A,B,C...*կէտերի հետ, կը նկատենք որ* AOB,BOC,COD... *եռանկիւնիները հաւասար են միմեանց (§ 105), բայց որովհետև* $\triangle BOC=\frac{BC.OM}{2}$*, ապա* $ABCDEF=n\,BC.\frac{OM}{2}$:

§ *124.* Խնդիր։ ABCDE բազմանկիւնին (Նկր. *170*) դարձնել հաւասարամեծ եռանկիւնի։

Լուծումն։ Անց կացնելով AC *անկիւնագիծը և* B *կէտից նորան զուգահեռական* BN *գիծը, շարունակենք* DC *կողմն մինչև* L *կէտը, ուր կտրվում է նա* BN *գծի հետ, յետոյ միացնենք* A *և* L *կէտերը։* ABC *և* ALC *եռանկիւնիները ունեն մի ընդհանուր հիմք* AC, *և որովհետև նոցա* B *և* L *գագաթները գտնվում են մի և նոյն* BN *գծի վերայ, որ զուգահեռական է նոցա հիմքի ապա այս եռանկիւնիների բարձրութիւնները հա-*



Նկար 170.

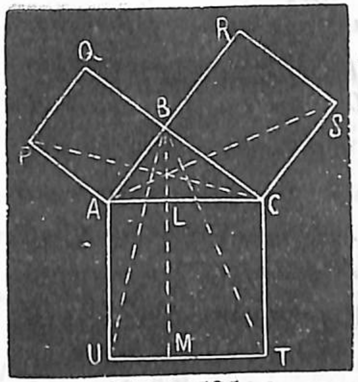
ւասար են և այդ պատճառաւ նոքա հաւասարամեծ են (§ 120). սորանից հետևում է, որ ABCDE հինգանկիւնին հաւասարամեծ է ALDE քառանկեանը։

Սորանից յետոյ անց կացնելով AD անկիւնագիծը և E կետից EP գիծը զուգահեռական AD անկիւնագծին, շարունակենք DC կողմն մինչև նորա EP գծի հետ հանդիպելն M կետում, միացնենք M և A կետերը։ ADE և ADM եռանկիւնիները հաւասարամեծ են և այդ պատճառաւ ALDF քառանկիւնին հաւասարամեծ է MAL եռանկեանը։

Քանի կողմն կամենայ ունենայ բազմանկիւնին, մենք միշտ կարող ենք փոխադրել նորան հաւասարամեծ եռանկեան, կրկնելով վերոյիշեալ կառուցումն, որովհետև իւրաքանչիւր այդպիսի կառուցմամբ բազմանկիւնին փոխարինվում է մի ուրիշ հաւասարամեծ բազմանկիւնով, որի կողմերի թիւը մինով քիչ է առաջինից։

§ 125. Որպէս զի որոշենք մի որ և իցէ բազմանկիւնու մակարդակը, կարելի է նորան փոխարինել հաւասարամեծ եռանկիւնով և որոշել եռանկիւնու մակարդակը. բայց կարելի է նոյնպէս բաժանել բազմանկիւնին եռանկիւնիների անց կացնելով տրամագծեր նորա մի որ և իցէ գագաթից, կամ թէ ուղիղ գծեր բազմանկիւնու մէջ վերցրած մի որ և իցէ կետից դէպի նորա անկեան գագաթները, և որոշել առանձին առանձին այդ եռանկիւնիների մակարդակները։

§ *126*. **Տեօրեմայ**։ Ուղղանկիւն եռանկիւնու ներքնագծի վերայ կառուցած քառակուսին հաւասար է նորա էջերի վերայ կառուցած քառակուսիների գումարին. *)



Նկար 171.

Թող ABC (նկր. 171) ուղղանկիւն եռանկիւնի լինի. ACTU, BRSC և APQB քառակուսիք կառուցած ներքնագծի և էջերի վերայ, հարկաւոր է ապացուցել, որ

ACTU=BRsC+APQB։

Ապաց. Ուղիղ անկեան գագաթից ցած թողնենք մի ուղղահայեաց դէպի ներքնագիծը և անց կացնենք CP և BU գծերը, որովհետև PAC և BAU երկու անկիւններից իւրաքանչիւրը բաղկացած է ուղիղ անկիւնից գումարած BAC անկեան հետ, ուրեմն այդ անկիւնները հաւասար են միմեանց. բացի այդ PA=AB և AC=AU, որպէս քառակուսու կողմեր. ուրեմն PAC և BAU եռանկիւնիները հաւասար են միմեանց (§ 15)։ Բայց

---

*) Այս առաջարկութիւնը կրում է Պիֆագորոսի Տեօրեմայ անունը, որովհետև դորա գիւտը Պիֆագորոսին են վերաբերում. սորան նոյնպէս անուանվում են magister matheseos, որովհետև հին ժամանակներում համալսարաններում մագիստրոսի քննութիւն բռնողներին էին առաջարկում։ Դա կրում է նոյնպէս մի ուրիշ անուն, Inventum hecatombe dignum, որը վերաբերում է այն լեգենդային, իբր թէ Պիֆագորոսը, այս տեօրեմայի գիւտի համար մուզային հեկատոմբ արաւ, այսինքն 100 եզան մատաղ։

Եթէ ուղղանկիւն եռանկիւնու երկու էջերը հաւասար են 3 և 4, ապա ներքնագիծը պիտի լինի 5, որովհետև $3^2+4^2=5^2$. այս եռանկիւնին Եգիպտական նշանաւոր եռանկիւնին է. 3 էջը նշանակում է csiris, միւս 4 էջը—Isis, իսկ 5 ներքնագիծը—Horus հաւանական է որ Պիֆագորոսը իւր ճանապարհորդութեան ժամանակ Եգիպտական քուրմերից իմացաւ այս եռանկիւնու մասին, և որ 3, 4 և 5 թուերի կոմբինացիան նպաստել են նորան այդ ընդհանուր տեօրեմայի գիւտին։

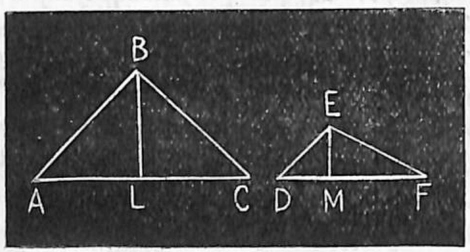
BAU եռանկիւնին և ALMU քառանկիւնին ունին մի ընդհանուր AU հիմք և AL հաւասար բարձրութիւններ և այդ պատճառաւ BAU եռանկիւնին ALMU քառանկիւնու կէսն է կազմում. (§ 120 հետև. 1), նոյնպէս PAC եռանկիւնին և APQB քառանկիւնին ունին AP ընդհանուր հիմք և BA հաւասար բարձրութիւններ և այդ պատճառաւ PAC եռանկիւնին APQB քառակուսու կիսին է հաւասար։ BAU և PAC եռանկիւնների հաւասարութիւնից հետևում է, որ APQB քառակուսին և ALMU քառանկիւնին հաւասարամեծ են։

Նոյն ձևով կարելի է ապացուցանել, որ BRSC քառակուսին և CLMT քառանկիւնին հաւասարամեծ են. սորանից հետևում է, որ APQB և BRSC քառակուսիների գումարը հաւասար է ACTU քառակուսուն։

Բայց որովհետև մի որ և իցէ a գծի վերայ կառուցած քառակուսու մակարդակը հաւասար է a^2 ալգեբրայական արտայայտութեանը, ապա այս § ապացուցած առաջարկութիւնը նոյնն է, ինչ որ § 63 յարաբերական գծերի օգնութեամբ ապացուցած առաջարկութիւնը։

§) 127. Տեորեմայ։ Մի մի հաւասար անկիւն ունեցող եռանկիւնիների մակարդակները այնպէս են յարաբերում իրար, որպէս այդ անկիւնը կազմող կողմերի արտադրեալները։

Թող ABC և DEF (նկր. 172) A և D հաւասար անկիւն ունեցող եռանկիւններ լինին. հարկաւոր է ապացուցանել, որ



Նկար. 172.

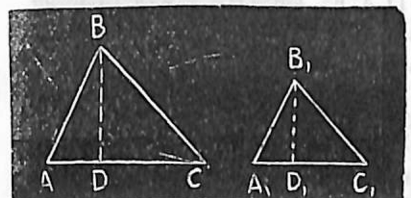
$$\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC.AB}{DF.DE}$$

Ապաց. Անցկացնելով BL և EM բարձրութիւնները, կը գտնենք (§ 120 հետև. 2) $\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC.BL}{DF.EM}$; բայց ABL և DEM ուղղանկիւն եռանկիւնները ունենալով մի հաւասար A և D անկիւններ, նման են, ուրեմն $\frac{BL}{EM}=\frac{AB}{DE}$. նախընթաց հաւասարութեան մէջ փոխանակ $\frac{BL}{EM}$ համեմատութեան դնելով $\frac{AB}{DE}$ համեմատութիւնը, կը գտնենք. $\frac{ABC}{DEF}=\frac{AC.AB}{DF.DE}$

§ 128. Տեորեմայ։ Նման եռանկիւնիների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, որպէս համապատասխան կողմերի երկրորդ աստիճանները։

Թող ABC և $A_1B_1C_1$ (նկր. 173) նման եռանկիւններ լինին. հարկաւոր է ապացուցանել, որ

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^{\,2}}$$



Նկար 173.

Ապաց. Անց կացնելով BD և B_1D_1 բարձրութիւնները, կը գտնենք.

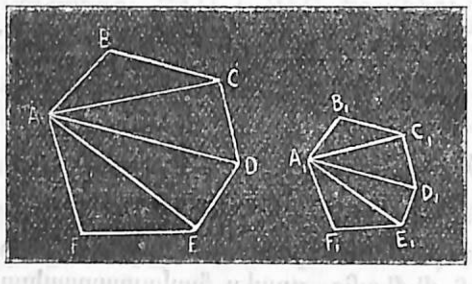
$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{AC\,BD}{A_1C_1.B_1D_1}$$

(§ 120 հետև. 2). բայց եռանկիւնների նմանութիւնից հետևում է $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{AC}{A_1C_1}$ և $\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BD}{B_1D_1}$. բազմապատկելով այս երկու յարաբերութիւնները, կը ստանանք՝ $\frac{AB^2}{A_1B_1^2}=\frac{AC.BD}{A_1C_1.B_1D_1}$

Ուրեմն

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}։$$

§ *129*. Տեօրեմայ։ Նման բազմանկիւնիների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, որպես համապատասխան կողմերի երկրորդ աստիճանները։



Նկար 174.

Թող ABCDEF *և* $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ *երկու նման բազմանկիւնիներ լինին. հարկաւոր է ապացուցանել, որ*

$$\frac{ABCDEF}{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}$$

Ապաց. A *և* A_1 *կետերից անց կացնելով անկիւնագծեր դէպի միւս անկիւնների գագաթները, և նկատելով, որ այս գծերը բաժանում են բազմանկիւնին համապատասխանաբար նման եռանկիւնիների* (§ *69*) *կը գտնենք* (§ *128*)

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{BC^2}{B_1C_1^2};\ \frac{ACD}{A_1C_1D_1}=\frac{CD^2}{C_1D_1^2};\ \frac{DAE}{D_1A_1E_1}=\frac{ED^2}{E_1D_1^2};\ \frac{AEF}{A_1E_1F_1}=\frac{EF^2}{E_1F_1^2}.$$

բայց (§ *68*)

$$\frac{AB}{A_1B_1}=\frac{BC}{B_1C_1}=\frac{CD}{C_1D_1}=\frac{ED}{E_1D_1}=\frac{EF}{E_1F_1}.$$

ուրեմն

$$\frac{ABC}{A_1B_1C_1}=\frac{ACD}{A_1C_1D_1}=\frac{DAE}{D_1A_1E_1}=\frac{AEF}{A_1E_1F_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}.$$

և սորանից

$$\frac{ABC+ACD+DAE+AEF}{A_1B_1C+A_1C_1D_1+D_1A_1E_1+A_1E_1F_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2},$$

կամ

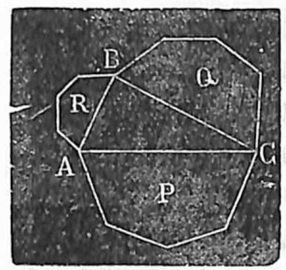
$$\frac{ABCDEF}{A_1B_1C_1D_1E_1F_1}=\frac{AB^2}{A_1B_1^2}։$$

Այս առաջարկութիւնից հետևում է

1) Կանոնաւոր համանուն բազմանկիւնիների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, որպէս նոցա դուրսը և ներսը գծած շրջապատների շառաւղների քառակուսին։

2) Երկու կանոնաւոր համանուն բազմանկիւնիների մակարդակները, որոնցից մինը շրջանի դուրսը-գծած է, իսկ միւսը ներսը—գծած, յարաբերում են միմեանց, որպէս շառաւիղի երկրորդ աստիճանը յարաբերում է ապոթեմայի երկրորդ աստիճանին։

130. Տեօրեմայ։ Ներքնագծի վերայ կառուցած բազմանկիւնին հաւասար է էջերի վերայ կառուցած իւրեան նման բազմանկիւնիների գումարին։



Նկար 175.

Թող ABC (*Նկր. 175*) *ուղղանկիւն եռանկիւնի լինի,* P, Q *և* R *երեք նման բազմանկիւնիներ են, կառուցած ներքնագծի և էջերի վերայ. հարկաւոր է ապացուցանել, որ* $P=Q+R$։

Ապաց. § *129 հիման վերայ ունենք*

$$\frac{Q}{P}=\frac{BC^2}{AC^2}\ \text{և}\ \frac{R}{P}=\frac{AB^2}{AC^2}.$$

Գումարելով այս հաւասարութիւնները, կը գտնենք

$$\frac{Q+R}{P}=\frac{BC^2+AB^2}{AC^2}.$$

բայց որովհետև

$BC^2+AB^2=AC^2$, *ապա* $Q+R=P$։

ԳԼՈՒԽ IX.

ՇՐՋԱՆԻ ՇՐՋԱԳԱՏԻ ԵՒ ՆՈՐԱ ՄԱԿԱՐԴԱԿԻ ՈՐՈՇՈՒՄՆ

Սահմանների մասին։ Շրջանի շրջապատի եւ մակարդակի որոշումն։ Շրջանի քառակուսիութիւնը կամ քվադրատուրան։

ՍԱՀՄԱՆՆԵՐԻ ՄԱՍԻՆ

§) **131** Շրջանի մակարդակի և նորա շրջապատի որոշումն նոյնպէս և որ և իցէ կորագիծ ձևի մակարդակի և իւր շրջագծի որոշումն, հիմնվում է մի առանձին սկզբունքի վերայ, որը անուանվում է սահմանների սկզբունք։

Երկու տեսակ մեծութիւններ կան՝ փոփոխական և անփոփոխ. եթէ քանակութիւնը փոփոխվում է մեծանալով կամ փոքրանալով, նա անուանվում է փոփոխական, իսկ եթէ քանակութիւնը պահպանում է միշտ նոյն մեծութիւնը—անուանվում է անփոփոխ։ Օրինակի համար մի շրջանի մէջ տրամագիծը անփոփոխ քանակութիւն է, որովհետև ինչ դրութիւն որ ստանայ, իւր մեծութիւնը երբէք չի փոխի. այն ինչ լարը փոփոխական քանակութիւն է, որովհետև փոխելով իւր

դրութիւնը, նա կամ կը մեծանայ կամ կը փոքրանայ. այն ինչ շրջանի մէջ գտնված մի կետից անցնող լարերի կտորների արտադրեալը անփոփոխ քանակութիւն է, որովհետև այդ արտադրեալ մի և նոյնն է բոլոր լարերի համար, որոնք անցնում են այն կետով։ Նոյնպէս և եռանկիւնու անկիւնները փոփոխական են, որովհետև նոքա փոփոխվում են, երբ փոխում ենք եռանկիւնու ձևը, այն ինչ նոցա գումարը անփոփոխ քանակութիւն է, որովհետև նա միշտ մնում է հաւասար 2d-ին,

Երբ փոփոխական քանակութիւնը՝ փոփոխվելով անվերջ մօտենում է անփոփոխ քանակութեանը, այնպէս որ նոցա միջի զանազանութիւնը կարելի լինի կամաւորապէս փոքրացնել, ապա անփոփոխ քանակութիւնը անուանվում է սահման այդպիսի փոփոխական քանակութեան, օրինակի համար. շրջանի հատող գծի երկու հատման կետերը որքան մօտենում են միմեանց, այնքան և հատող գիծը աւելի և աւելի մօտենում է շօշափող գծին, այդ պատճառաւ շօշափող գիծը սահման է հատող գծի, երբ սորա հատման կետերը մօտենում են միմեանց. Նոյնպէս 0,999... կոտորակը անվերջ մօտենում է 1-ին, որքան նորա տասնորդական նշանները աւելանում են, այդ պատճառաւ 1 է սահման 0,999...

Փոփոխական քանակութեան հէնց միայն մի մօտենալը դէպի անփոփոխ քանակութիւնը դեռ բաւական չէ, որ ընդունենք սորան իբրև սահման առաջինի, այլ հարկաւոր է համոզուել, որ այդ մօտենալը անվերջ է այսինքն—փոփոխական և անփոփոխ քանակութեանց միջի տարբերութիւնը կարելի է անենափոքրիկ քանակութիւնից աւելի փոքրացնել, օրինակի համար 0,9888... կոտորակը մօտենում է 1-ին, երբ աւելացնում ենք նորա տասնորդական նշանները, բայց 1 չի կարող լինել այս կոտորակի սահմանը, որովհետև դոցա միջի տարբերութիւնը միշտ աւելի մեծ է քան $\frac{1}{90}$, իսկ 0,9888.... սահմանը է $\frac{89}{90}$, որին նա անվերջ մօտենում է։

Փոփոխական քանակութիւնը, որի սահմանը է զերօ, որին և անվերջ մօտենում է, անուանվում է անվերջ փոքրիկ քանակութիւն. օրինակի համար, հատող գծի շրջապատի մէջ գտնուած մասի երկարութիւնը անվերջ փոքրիկ քանակութիւն է, երբ հատուող գիծը մօտենում է շօշափող գծին։ Նոյնպէս 1—0,999... տարբերութիւնը անվերջ փոքրիկ մեծութիւն է։

Եթէ a նշանադրենք մի որ և իցէ փոփոխական քանակութեան սահմանը, իսկ x—նոցա միջի տարբերութիւնը, ապա փոփոխական քանակութիւնը կարելի է այսպէս ներկայացնել $a+x$. ի հարկէ x, լինելով փոփոխական քանակութեան և իւր սահմանի տարբերութիւնը, է մի քանակութիւն, որը միշտ փոքրանում է և անվերջ մօտենում է զերօին, ուրեմն անվերջ փոքրիկ քանակութիւն է։

§ 132. Եթէ երկու փոփոխական քանակութիւնք, իւրեանց փոփոխվելու ժամանակ մնում են միշտ իրար հաւասար, ապա հաւասար են և նոցա սահմանները։

Թող $a+x$ և $b+y$ երկու փոփոխական քանակութիւններ լինին, որոց սահմաններն են a և b, դիցուք

թէ $a+x=b+y$. հարկաւոր է ապացուցանել, որ $a=b$։

Ապաց. Նկատենք, որ a չի կարող փոքր լինել b-ից, որովհետև եթէ $a<b$, ապա նշանադրելով $b-a=d$ և ներկայացնելով $a+x=b+y$ հաւասարութիւնը այսպէս $b-a=x-y$, կը տեսնենք որ $x-y=d$. ուրեմն x և y միջի տարբերութիւնը հաւասար է անփոփոխ d քանակութեանը. ուրեմն x և y չեն կարող անվերջ փոփոխուել, որը հակառակ է այս քանակութեանց յատկութեանը. իսկ եթէ ենթադրէինք $a>b$, նոյն անհիմն եզրակացութեանը կը գայինք։ Ուրեմն a պիտի հաւասար լինի b-ին։

§) 133. Տեօրեմայ։ Երբ երկու փոփոխական քանակութիւնք իւրեանց բոլոր փոփոխութեան ժամանակ պահպանում են մի և նոյն համեմատութիւնը, ապա նոցա սահմանները կունենան մի և նոյն համեմատուտիւնը։

Թող $a+x$ և $b+y$ երկու փոփոխական քանակութիւններ լինեն, որոնց սահմանները են a և b. դիցուք թէ $\frac{a+x}{b+y}$ համեմատութիւնը անփոփոխ քանակութիւն է. հարկաւոր է ապացուցանել, որ $\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}$։

Ապաց. Դիցուք $\frac{a+x}{b+y}=\frac{m}{n}$. ենթադրելով որ m և n որ և իցէ անփոփոխ քանակութիւն են, ապա

$$an+nx=bm+my։$$

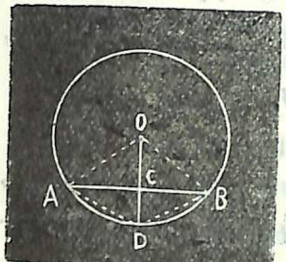
Որովհետև $an+nx$ մի փոփոխական քանակութիւն է, որի սահմանը հաւասար է an, իսկ $bm+my$ միւս փոփոխական քանակութիւնն է, որի սահմանը հաւասար է bm, ապա այդ փոփոխական քանակութիւնների հաւա-

սարութիւնից հետեւում է նախընթաց § համաձայն $an=bm$ *կամ* $\frac{a}{b}=\frac{m}{n}$. *համեմատելով այս յարաբերութիւնը* $\frac{a+x}{b+y}=\frac{m}{n}$ *յարաբերութեան հետ, կը գտնենք, որ*

$$\frac{a+x}{b+y}=\frac{a}{b}.$$

§ *134*. Տեօրեմա։ Շրջանի մակարդակը է սահման նորա դուրսը եւ ներսը գծած կանոնաւոր բազմանկեանց մակարդակների։

Ապաց. Անհերև է, որ շրջանի մակարդակը մեծ է իւր ներսը գծած բազմանկիւնու մակարդակից և փոքր է դուրսը գծած բազմանկիւնու մակարդակից, որովհետև ներսը գծած բազմանկիւնու մակարդակը միայն մի մասն է շրջանի մակարդակի, իսկ շրջանի մակարդակը— մի մասն է դուրսը գծած բազմանկիւնու մակարդակի. բայց որքան դուրսը և ներսը գծած բազմանկեանց կողմերի թիւը շատացնում ենք, այնքան նոցա մակարդակների տարբերութիւնը քչանում է, և այս տարբերութիւնը կարող ենք դարձնել ամենափոքրիկ մեծութիւնից աւելի փոքր, և յիրաւի թող AB (*Նկր. 176*) *լինի մի կողմն ներսը գծած կանոնաւոր բազմանկիւնու և* OD *շառաւիղը ուղղահայեաց* AB *կողմին, որովհետև* $CD=OD-OC=AO-OC$ *և* $AO-OC<AC$; *ապա* $CD<AC$, *այսինքն շառաւիղի և ապոթեմայի տարբերութիւնը փոքր է մի կողմի կիսից։ Կողմերի թիւը հետևապէս կրկնապատկելով, կենդրոնական անկիւններ հետևապէս փոքրանում են և կարող ենք կամաւորապէս փոքրացնել. բայց որովհետև ապացուցեցինք, որ շառաւիղի և ապոթեմայի տարբերութիւնը մի կողմի կիսից աւելի փոքր է, ապա սորանից հետևում է, որ հետևապէս կրկնապատկելով բազմանկիւնու կողմերը, այս տարբերութիւնը անվերջ փոքրանում է։*



Նկար 176.

Եթէ նշանադրենք u *կանոնաւոր ներսը գծած բազմանկիւնու մակարդակը,* U*-համանուն դուրսը գծած բազմանկիւնու մակարդակը,* r*—շրջանի շառաւիղը և* a*-ապոթեման, ապա (§ 129 հետև. 2)* $\frac{u}{U}=\frac{a^2}{r^2}$, *կամ հանելով միաւորից այս հաւասարութեան երկու մասերն*

$$\frac{U-u}{U}=\frac{r^2-a^2}{r^2};\quad U-u=\frac{r^2-a^2}{r^2}u.$$

Բայց որովհետև հետևապէս շատացնելով բազմանկիւնու կողմերի թիւը, a *անսահման մօտենում է* r, *ապա այս հաւասարութիւնից հետևում է, որ* $U-u$ *անսահման փոքրանում է և կարող է կամաւորապէս փոքրանալ. սորանից մենք եզրակացնում ենք, որ երբ հետևապէս կրկնապատկում ենք բազմանկիւնու կողմերի թիւը ներսը գծած բազմանկիւնու և շրջանի մակարդակների տարբերութիւնը, նոյնպէս դուրսը գծած բազմանկիւնու և շրջանի մակարդակների տարբերութիւնը, կարելի է ամենափոքրիկ մեծութիւնից էլ փոքրացնել և այդ պատճառաւ շրջանի մակարդակը է սահման դուրսը և ներսը գծած բազմանկեանց մակարդակների, երբ սոցա կողմերի թիւը անհամար շատանում է։*

Այս առաջարկութիւնը երբեմն այսպէս է արտայայտւում. շրջանը է անհամար կողմն ունեցող կանոնաւոր բազմանկիւն։

§ *135.* Տեորեմա։ Շրջապատը է սահման դուրսը եւ ներսը գծած բազմանկեանց շրջագծերի, երբ նոցա կողմերը անհամար շատացնում ենք։

Ապաց. Նախընթաց § հետեւում է, որ հետեւապէս շատացնելով բազմանկեանց կողմերի թիւը, դուրսը և ներսը գծած բազմանկիւնները մօտենում են միաւորվելու շրջանի հետ։ Բայց կրկնապատկելով կողմերի թիւը, ներսը գծած բազմանկեան շրջագիծը մեծանում է (§ 131), իսկ դուրսը գծած բազմանկիւնու— փոքրանում է (§ 132). ուրեմն դուրսը գծած բազմանկիւնու շրջագիծը փոքրանալով մօտենում է միաւորվելու շրջապատին, իսկ ներսը գծած բազմանկիւնու շրջագիծը մեծանալով է մօտենում միաւորվելու շրջագծի հետ։ Սորանից հետեւում է, որ շրջապատը մեծ է ներսը գծած բազմանկիւնու շրջագծից, իսկ փոքր է դուրսը գծած բազմանկիւնու շրջագծից։

Կողմերի թիւը հետեւապէս կրկնապատկելով, դուրսը և ներսը գծած բազմանկեանց միջի տարբերութիւնը անվերջ փոքրանում է և կարելի է կամաւորապէս փոքրացնել. չիրաւի թող P լինի դուրսը գծած բազմանկիւնու շրջագիծը, իսկ p համանուն ներսը գծած բազմանկիւնու շրջագիծը,—r շառաւիղը և a ապոթեման, ապա (§ 129)

$$\frac{p}{P}=\frac{a}{r} \text{ կամ } \frac{P-p}{P}=\frac{r-a}{r} \text{ կամ}$$

$$P-p=P\,\frac{r-a}{r}.$$

Բայց որովհետև կողմերի թուի հետևապէս շատացնելովն r—a, նախընթաց § համեմատ, անվերջ փոքրանում է, ապա այս հաւասարութիւնից հետևում է, որ P—p կարող ենք կամաւորապէս փոքրացնել. սորանից եզրակացնում ենք, որ հետևապէս շատացնելով կողմերի թիւը, ներսը գծած բազմանկիւնու շրջագծի և շրջապատի տարբերութիւնը, նոյնպէս A դուրսը գծած բազմանկիւնու շրջագծի և շրջապատի տարբերութիւնը կարելի է կամաւորապէս փոքրացնել և այդ պատճառաւ շրջապատը է սահման դուրսը և ներսը գծած կանոնաւոր բազմանկեանց շրջագծերի, երբ նոցա կողմերի թիւը անհամար շատացնում ենք։

ՇՐՋԱՆԻ ՄԱԿԱՐԴԱԿԻ ԵՒ ՇՐՋԱՊԱՏԻ ՈՐՈՇՈՒՄՆ։

§ *136.* Տեօրեմայ. Շրջապատները յարաբերում են միմեանց ինչպէս իւրեանց շառաւիղները կամ տրամագծերը։

Երևակայենք երկու շրջաններ, որոնց շառաւիղները թող լինեն r և R,—իսկ շրջապատների երկարութիւնները c և C. հարկաւոր է ապացուցանել, որ

$$\frac{C}{c}=\frac{R}{r}=\frac{2R}{2r}.$$

Ապաց։ Դիցուք թէ այս շրջանների մէջ գծված են երկու կանոնաւոր համանուն բազմանկիւնիք, նշանագրելով նոցա շրջագծերը P և p կըգտնենք (§ 129)

$$\frac{P}{p}=\frac{R}{r}.$$

Բայց որովհետև շրջանը է սահման ներսը և դուրսը գծած բազմանկիւնների, ապա (§ 134)

$$\frac{C}{c}-\frac{R}{r}=\frac{2R}{2r}.$$

Ներկայացնելով այս յարաբերութիւնը այսպէս՝

$$\frac{C}{2R}=\frac{c}{2r},$$

եզրակացնում ենք, որ շրջապատի և տրամագծի յարաբերութիւնը անփոփոխ քանակութիւն է և բոլոր շրջանների համար նոյնն է։

Այս անփոփոխ քանակութիւնը պայմանուել են նշանակել յունարէն Π տառով, այնպէս որ

$$\frac{C}{2R}=\Pi$$

Π թիւը մի անարմատ թիւ է և այդ պատճառաւ չի կարելի որոշել ճիշտ կերպով, իսկ մօտաւորապէս նա հաւասար է 3,14159...

§ *137.* Տեորեմայ։ Շրջապատի երկարութիւնը հաւասար է շառաւիղին բազմապատկած 2π վերայ։

Թող C լինի շրջապատի երկարութիւնը և R նորա շառաւիղը. հարկաւոր է ապացուցանել, որ $C=2\Pi R$:

Ապաց. Նախընթաց § այս $\frac{C}{2R}=\Pi$ *հաւասարութիւնից կը ստանանք* $C=2\Pi R$, *ինչ որ հարկաւոր էր ապացուցանել։*

Այս հաւասարութեան օգնութեամբ կարելի է գտնել շրջապատի երկարութիւնը, երբ յայտնի է նորա շառաւիղը և նա արտայայտուած կը լինի նոյն երկարութեան չափով, ինչ չափով որ արտայայտուած է շառաւիղը։

Շրջապատի որոշումն երկարութեան միաւորով անուանվում է շրջապատի ուղղելն։

Եթէ $C=2\Pi R$ *հաւասարութեան մէջ ընդունենք* $R=1$, *ապա* $C=2\Pi$, *այդ կընշանակէ որ* 2Π *է այն շրջապատի երկարութիւնը որի շառաւիղը հաւասար է 1։*

Իսկ $C=2\Pi R$ *հաւասարութիւնից կըստանանք* $R=\frac{C}{2\Pi}$, *այս հաւասարութեան օգնութեամբ կարող ենք գտնել շրջանի շառաւիղը, երբ յայտնի է նորա շրջապատի երկարութիւնը։*

§ 138. Խնդիր. Գտնել *n* աստիճան ունեցող աղեղի երկարութիւնը։

Լուծումն. Թող S *լինի* n^0 *պարունակող աղեղի գծային երկարութիւնը և* R *նորա շառաւիղը, բայց որովհետև ամբողջ շրջապատի երկարութիւնը հաւասար է* $2\Pi R$, *ապա նորա մի աստիճանի երկարութիւնը կըլինի* $\frac{2\Pi R}{360}$,

իսկ n^0 *երկարութիւնը* $-\frac{2\Pi R.n}{360}=S$։

Աղեղի երկարութիւնը, որոշուած այս հաւասարութեան օգնութեամբ, կ՚արտայայտվի այն երկարութեան միաւորով. ինչ միաւորով որ արտայայտված է R *շառաւիղը։*

Աղեղի որոշելն երկարութեան միաւորով անուանվում է ուղղելն աղեղի։

Նախընթաց հաւասարութիւնից գտնում ենք

$$n=\frac{360.S}{2\Pi R}:$$

Այս հաւասարութեան օգնութեամբ կարելի է գտնել աղեղի աստիճանների թիւը, եթէ յայտնի է նորա գծային երկարութեան չափը։

Եթէ n^0 *պարունակող անկեան գագաթից գծենք* R *և* r *շառաւիղներով աղեղներ և նշանադրենք այս աղեղների երկարութիւնները* S *և* s, *ապա նախընթաց* § *համեմատ,* $S=\frac{2\pi R\cdot n}{360}$, $s=\frac{2\pi r n}{360}$ *ուրեմն* $\frac{S}{s}=\frac{R}{r}$,
այսինքն միևնոյն կենդրոնական անկեան համապատասխանող աղեղները յարաբերում են միմեանց այնպէս, ինչպէս նոցա շառաւիղները։

§ *139.* Խնդիր։ Գտնել շրջապատի եւ տրամագծի յարաբերութիւնը կամ π թիւը։

Լուծումն։ § *137 մէջ մենք գտանք, որ* 2π *է այն շրջապատի երկարութիւնը, որի շառաւիղը հաւասար է 1 և այդ պատճառաւ փոխարէն* Π *որոշելն, որոշենք այն շրջապատի երկարութիւնը, որի շառաւիղը=1։*

Այսպիսի շրջապատը մօտաւորապէս որոշելու համար նշանադրենք a_6, a_{12}, a_{24}... *կանոնաւոր ներսը-գծած 6, 12, 24... կողմանի բազմանկեանց մի կողմն, իսկ—*b_6, b_{12}, b_{24}... *դուրսը գծած համապատասխան բազմանկեանց մի կողմն և գտնենք նոցա շրջագծերը։*

Բայց որովհետև շրջանի շառաւիղը հաւասար է 1, ապա (§ *113*) $a_6=1$, *իսկ ներսը-գծած 6-կողմանու շրջագիծը=6։*

Յետոյ § *110 համաձայն*

$$a_{12}=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_6^2}{4}}}=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{1}{4}}}$$

$$=\sqrt{2-\sqrt{3}}=0{,}517638\ldots$$

Ուրեմն ներսը—գծած 12-կողմանու շրջագիծը հաւասար է 6,211657.

Նոյն ձևով կը գտնենք

$$a_{24}=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_{12}^2}{4}}}=0{,}261052\ldots,$$

$$a_{48}=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_{24}^2}{4}}}=0{,}130806\ldots,$$

$$a_{96}=\sqrt{2-2\sqrt{1-\frac{a_{48}^2}{4}}}=0{,}065438\ldots,$$

և այլն

Սոցա համապատասխանող շրջագծերը են.
6,265257..., 6,278700..., 6,282064... և այլն

Ապա հաշուելով § *109 ֆորմուլայի օգնութեամբ* b_6 b_{12}... *դուրսը—գծած բազմանկեանց կողմերը, կը գտնենք*

$$b_6=\frac{a_6}{\sqrt{1-\frac{a_6^2}{4}}}=1{,}154700\ldots,$$

$$b_{12}=\frac{a_{12}}{\sqrt{1-\frac{a_{12}^2}{4}}}=0{,}535898\ldots,$$

$$b_{24}=\frac{a_{24}}{\sqrt{1-\frac{a_{24}^2}{4}}}=0{,}263294\ldots,$$

$$b_{48}=\frac{a_{48}}{\sqrt{1-\frac{a_{48}^2}{4}}}=0{,}131087\ldots,$$

$$b_{96}=\frac{a_{96}}{\sqrt{1-\frac{a_{96}^{2}}{4}}}0,065472\ldots,$$

Սոցա համապատասխանող շրջագծերը են.
6,928200; 6.630776; 6,319056; 6,292176; 6,285430; և այլն։

Աւելի աչքի ընկնելու համար զետեղենք այս աղիւսակում այն եզրակացութիւնները, որք ստացվում են հաշուելուց։

Բազմանկեան կողմերի թիւը։	Ներսը-գծած բազմանկիւնու շրջագիծը։	Դուրսը-գծած բազմանկիւնու շրջագիծը։
6	6,000000	6,928200
12	6,211657	6,630776
24	6,265257	6,319056
48	6,278700	6,292176
96	6,282064	6,285429
192	6,282905	6,283746
384	6,283115	6,283326
768	6,283168	6,283220
1536	6,283181	6,283194
3072	6,283184	6,285187

Այս աղիւսակից երևում է, որ դուրսը ու ներսը գծած բազմանկեանց շրջագծերի տարբերութիւնը աստիճանաբար փոքրանում է, երբ կողմերի թիւը հետեւապէս շատանում է և 3072—կողմեանի բազմանկեանց շրջագծերի տարբերութիւնը աւելի փոքր է քան 0,00001 ուրեմն և այս բազմանկեանց շրջագծերի և շրջապատի տարբերութիւնը նոյնպէս փոքր է 0.00001, բայց որովհետև մեր վերցրած. շրջապատը հաւասար է 2π ապա

$$2\pi=6,28318 \text{ կամ } \pi=3,14159։$$

ճշտութեամբ մինչև 0,00001։

Յունաց երկրաչափ Արխիմեդը հաշուելով 76—կողմանի շրջագիծը, գտաւ $\pi=\frac{22}{7}=3,1428$ ճշտութեամբ մինչև 0,01. շատ հաշիւների մէջ այս թուի ճշտութիւնը բաւականացուցիչ է։

Անդրիան Միցիյ, որը 16 դարու վերջերումն էր կենում, գտաւ։

$$\pi=\frac{355}{113}=3,1415920$$

ճշտութեամբ մինչև 0,000001։ Այս թիւը ունի բաւականացուցիչ ճշտութեան սահման, բացի այդ հեշտ կարելի է պահել յիշողութեան մէջ, մանաւանդ եթէ նրան ներկայացնենք այսպէս $\frac{1}{\pi}=113:355$։

§) 138. Տեորեմա։ Շրջանի մակարդակը հաւասար է շառաւիղի երկրորդ աստիճանին՝ բազմապատկած π վերայ։

Ապաց. Շրջապատը նշանադրելով C, իսկ M և P դուրսը-գծած կանոնաւոր բազմանկիւնու մակարդակը և շրջագիծը։ Եթէ a է տարբերութիւնը դուրսը-գըծած բազմանկիւնու և շրջանի մակարդակների. այնպէս որ $M-K=a$ և $в$ է տարբերութիւնը շրջապատի և բազմանկիւնու շրջագծի, այնպէս որ $P-C=в$, ապա հետեւապէս շատացնելով բազմանկիւնու կողմերի թիւը a և $в$ անսահման պիտի փոքրանան, բայց (§§ 123 և 117) $M=\frac{P\cdot R}{2}$ և որովհետև $M=K+a$ և $P=C+в$, ապա

$$K+a=\frac{R}{2}(C+в)=\frac{RC}{2}+\frac{Rв}{2}$$

Այս հաւասարութեան մէջ $K+a$ և $\frac{RC}{2}+\frac{R\text{в}}{2}$
երկու փոփոխական քանակութիւններ են, որոց անփո-
փոխ մասները K և $\frac{RC}{2}$ կը լինեն նոցա սահմանները,
ուրեմն (§ 132) $K=\frac{CR}{2}$
այսինքն շրջանի մակարդակը հաւասար է շրջապատին
բազմապատկած շառաւիղի կէսի վերայ։

Շրջանի մակարդակի այս արտայայտութիւնը
կարող էինք ստանալ ուղղակի, եթէ շրջանի մակար-
դակը համարենք կանոնաւոր անհամար—կողմանի
բազմանկիւնի։

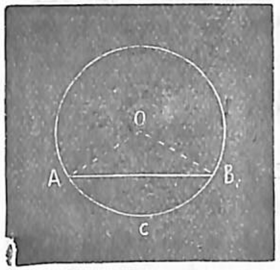
Նկատելով, որ $C=2\Pi R$ (§ 137) կը գտնենք $K=\Pi R^2$։
Այս հաւասարութեան օգնութեամբ գտնում ենք
շրջանի մակարդակը, երբ նորա շառաւիղը յայտնի է,
այսպիսով շրջանի մակարդակը կ'արտայայտուի այնպի-
սի քառակուսի միաւորներով, ինչպիսի երկարութեան
միաւորով արտայայտուած է շառաւիղը։

$K=\Pi R^2$ այս հաւասարութիւնից գտնում ենք
$R=\sqrt{\frac{K}{\Pi}}$, որի օգնութեամբ կարող ենք որոշել
շառաւիղը երբ յայտնի է շրջանի մակարդակը։

$K=\Pi R^2$ հաւասարութիւնից հետևում է, որ շրջան-
ների մակարդակները յարաբերում են միմեանց այնպէս,
ինչպէս նոցա շառաւիղների երկրորդ աստիճանները, և
յիրաւի թող K և K_1 լինեն երկու շրջանների մակարդակ-
ներ, որոնց շառաւիղներն են R և R_1, այն ժամանակ

$K=\Pi R^2$ և $K_1=\Pi R_1^2$ ուրեմն $\frac{K}{K_1}=\frac{R^2}{R_1^2}$

§ 139. Տեորեմայ։ Հատուածի մակարդակը հաւասար է իւր ուղղեալ լարին բազմապատկած շառաւիղի կիսի վերայ։



Նկար 178.

Թող S լինի AOB հատուածի մակարդակը (նկր. 178), R շրջանի շառաւիղը և s աղեղի երկարութիւնը. հարկաւոր է ապացուցանել, որ $S=s\frac{R}{2}$

Ապաց. Ի նկատի առնելով, որ շրջանի մակարդակը յարաբերում է հատուածի մակարդակին այնպէս, ինչպէս շրջապատը հատուածի աղեղին, կը գտնենք $\Pi R^2:S=2\Pi R:s$ և այստեղից $S=s\cdot\frac{R}{2}$։

Այս յարաբերութիւնից երևում է, որ միևնոյն շառաւիղ ունեցող հատուածների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, որպէս նոցա աղեղները։

Եթէ նշանակենք n-ով S աղեղի աստիճանների թիւը. կը տեսնենք որ $S=\frac{2\Pi R\cdot n}{360}$ (§ 138), ապա կը ստանանք $S=\frac{\Pi R^2\cdot n}{360}$։

Այս հաւասարութիւնից հետևում է, որ մի և նոյն քանակութեամբ աստիճան ունեցող հատուածների մակարդակները յարաբերում են միմեանց, ինչպէս շառաւիղների երկրորդ աստիճանները։

§ 140. Տեորեմայ։ Շրջանը, որի տրամագիծը հաւասար է ուղղանկիւն եռանկիւնու ներքնաձիգին, հաւասարամեծ է այն երկու շրջանների գումարին, որոց տրամագծերը էջերին են հաւասար։

Առաջ. Թող a, b և c լինեն ներքնագիծը և էջերը մի որ և իցէ ուղղանկիւն, եռանկիւնու P այն շրջանի մակարդակը, որի տրամագիծը, է a իսկ Q և R այն շրջանների մակարդակները, որոնց տրամագծերը են b և c: Հարկաւոր է ապացուցանել, որ $P=Q+R$:

Ապաց. § *138* համաձայն ունենք

$$P=\Pi\left(\frac{a}{2}\right)^2=\frac{\Pi a^2}{4},\quad Q=\Pi\left(\frac{b}{2}\right)^2=\frac{\Pi b^2}{4}\ \text{և}\ R=\Pi\left(\frac{c}{2}\right)^2=\frac{\Pi c^2}{4}$$

առցանից $Q+R=\Pi\frac{b^2+c^2}{4}$, բայց որովհետև ուղղանկիւն եռանկիւնու յատկութեանը համեմատ $a^2=b^2+c^2$, ապա $Q+R=\frac{\Pi a^2}{4}$ և այս պատճառաւ

$$P=Q+R:$$

ՇՐՋԱՆԻ ՔԱՌԱԿՈՒՍԱՑՆԵԼԸ ԿԱՄ ՔՎԱԴՐԱՏՈՒՐԱՆ:

§ *141.* Շրջանի քվադրատուրան է մի խնդիր որով պէտք է որոշել քառակուսի, որը հաւասարամեծ լինի շրջանին:

Այս խնդրի լուծումն ալգեբրայական ձևով մի դժուար բան չէ, որովհետև շրջանի շառաւիղը նշանակելով R և նորան հաւասարամեծ քառակուսու մի կողմն—X, ունենք $X^2=\Pi R^2$ ուրեմն.

$$X=R\sqrt{\Pi}=R\sqrt{3,1415926}=R.1,7724518..,$$

և այդ պատճառաւ միշտ կարելի է որոշել X բաւականացուցիչ ճշտութեամբ:

Բայց առհասարակ շրջանի քվադրատուրան կը նշանակէ կառուցանել քանոնի և կարկինի օգնութեամբ երկրաչափական ձևով մի քառակուսի, որը լինի հա-

ւասարամեծ շրջանին: Այս դիպուածում շրջանի քըվադրատուրան անկարելի է, որովհետև անկարելի է անարմատ Π թիւը կառուցանել, և անօգուտ է այդ կառուցումն, որովհետև կարելի է, ինչպէս ասացինք, բաւարար ճշտութեամբ որոշել ալգեբրայական ձևով այն քառակուսու մի կողմն, որը հաւասարամեծ է տուած շրջանին:

Շրջանի քվադրատուրան գտնելու համար զանազան մարդիկ շատ փորձեր են արած, որք կորցնելով միայն ահագին ժամանակ և մտքի ոյժ, հռչակեցին այդ խնդիրը: Գիտնական հիմնարկութիւնները, որպէս զի վերջ դնեն այդ առարկային վերաբերեալ անօգուտ հետազօտութիւններին, համաձայնեցին այլևս չընդունել վերաքննելու համար այդ հարցի վերաբերեալ ոչ մի առաջարկութիւն և հասան իւրեանց նպատակին:

~~1650~~ 7ր.